

SÉRIE A, N° 899

N° D'ORDRE :

1715

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. P. LE ROLLAND

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes

1^{re} THÈSE. — ETUDE DE L'OSCILLATION DU PENDULE PAR LA
MÉTHODE PHOTOGRAPHIQUE. (INFLUENCE DE LA
SUSPENSION).

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : LES
LOIS DE BERTHOLLET.

Soutenues le 10 mai 1922 devant la Commission d'examen.

MM. KOENIGS..... *Président.*

GUILLET

MARCEL GUICHARD }

Examineurs.

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1922

SÉRIE A, N° 899

N° D'ORDRE :

1715

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. P. LE ROLLAND

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes

1^{re} THÈSE. — ETUDE DE L'OSCILLATION DU PENDULE PAR LA
MÉTHODE PHOTOGRAPHIQUE. (INFLUENCE DE LA
SUSPENSION).

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : LES
LOIS DE BERTHOLLET.

Soutenues le 10 mai 1922 devant la Commission d'examen.

MM. KOENIGS..... *Président.*

GUILLET..... } *Examineurs.*
MARCEL GUICHARD }



PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1922

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... MOLLIARD, *Prof.*... Physiologie végétale.
Doyen honoraire.... P. APPELL.

Profess. honoraires. { P. PUISEUX.
 VÉLAIN.
 BOUSSINESQ
 BOUTY.

E. PICARD..... Analyse supér. et algèbre supérieure.
 G. BONNIER..... Botanique.
 KOENIGS..... Mécanique physique et expérimentale.
 GOURSAT..... Calcul différentiel et calcul intégral.
 HALLER..... Chimie organique.
 JOANNIS..... Chimie (Enseignement P. C. N.).
 JANET..... Electrotechnique générale.
 WALLERANT..... Minéralogie.
 ANDOYER..... Astronomie.
 PAINLEVÉ..... Mécanique anal. et mécan. céleste.
 HAUG..... Géologie.
 H. LE CHATELIER. Chimie générale.
 G. BERTRAND.... Chimie biologique.
 M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
 CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés)
 C. CHABRIÉ..... Chimie appliquée.
 G. URBAIN..... Chimie minérale.
 EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et phys. mathém.
 MARCHIS..... Aviation.
 JEAN PERRIN..... Chimie physique.
 G. PRUVOT..... Anatomie, et physiologie comparées.
 ABRAHAM..... Physique.
Professeurs..... { CARTAN..... Mécanique rationnelle.
 Cl. GUICHARD.... Géométrie supérieure.
 LAPICQUE..... Physiologie générale.
 GENTIL..... Géographie physique.
 VESSIOT..... Théorie des groupes et calc. des variat.
 COTTON..... Physique générale.
 DRACH..... Application de l'analyse à la géométrie.
 Ch. FABRY..... Physique.
 CHARLES PÉREZ... Zoologie.
 LÉON BERTRAND... Géologie appliquée et géologie région.
 DANGEARD..... Botanique (Enseignement P. C. N.).
 LESPIEAU..... Théories chimiques.
 LEDUC..... Physique théorique et phys. céleste.
 MONTEL..... Mathématiques générales.
 MAURAIN..... Physique du Globe.

HEROUARD..... Zoologie.
 RÉMY PERRIER... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
 SAGNAC..... Physique théorique et physique céleste
 RABAUD..... Biologie expérimentale.
 PORTIER..... Physiologie.
 BLAISE..... Chimie organique.
 PÉCHARD..... Chimie (Enseignement P. C. N.).

Secrétaire..... D. TOMBECK

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

A mon Maître

M. G. MOREAU

Doyen de la Faculté des Sciences de Rennes

Hommage reconnaissant.

A la mémoire vénérée de mon illustre Maître

G. LIPPMANN

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes

ÉTUDE DE L'OSCILLATION DU PENDULE PAR LA MÉTHODE PHOTOGRAPHIQUE

(INFLUENCE DE LA SUSPENSION)

Par P. LE ROLLAND

INTRODUCTION

1. — Le présent travail a comme objet des recherches nouvelles sur le mouvement du pendule libre, par application de la méthode photographique:

On sait l'importance et le nombre des travaux sur le pendule et on en trouve évidemment la raison dans ses deux propriétés fondamentales : d'une part, c'est un corps qui tombe et remonte presque indéfiniment ; d'autre part, la durée de ses oscillations ne varie que très lentement avec l'amplitude. De ces deux propriétés découlent immédiatement les importantes applications du pendule, à la mesure de l'intensité de la pesanteur et à la mesure du temps.

Dans l'étude du pendule, on peut se placer à deux points de vue différents qui correspondent respectivement à l'une ou l'autre de ses applications essentielles :

Si l'on se propose de mesurer l'intensité de la pesanteur, on doit s'efforcer de déterminer la loi exacte de son mouvement en fonction des paramètres géométriques ou physiques dont il peut dépendre. De là les corrections nombreuses intro-

duites pour la détermination de la longueur du pendule à secondes : réduction à l'arc infiniment petit, à une température normale, au vide, au niveau de la mer, correction due à la cylindricité du couteau, etc., et aussi les dispositions et méthodes spéciales (réversion, échange des couteaux, masses interchangeables, etc.), instituées dans le but d'éliminer toutes les causes d'erreur qui peuvent intervenir dans les mesures absolues. C'est pour la même raison que dans ces recherches on s'est servi exclusivement du pendule à couteau comme étant le seul bien défini au point de vue géométrique.

Si, au contraire, on a pour but d'appliquer le pendule à la mesure du temps, il s'agit d'un problème tout différent : on cherche à éliminer toutes les influences perturbatrices qui peuvent troubler l'isochronisme et la constance des oscillations du régulateur. La connaissance exacte des forces n'est pas ici nécessaire ; il suffit qu'elles demeurent invariables, de façon que le caractère de permanence dans les conditions de l'oscillation soit réalisé.

2. — On arrive d'ailleurs aujourd'hui à un degré de précision remarquable, dans la mesure du temps par les horloges astronomiques, mais bien plutôt par suite de perfectionnements de plus en plus grands apportés par les artistes horlogers dans la construction de ces instruments, que comme conséquence d'une application de recherches expérimentales ou théoriques sur ce sujet.

Si on consulte en effet une bibliographie du pendule — par exemple celle de Wolff, au début de la collection des *Mémoires sur le pendule* publiée par la Société française de physique, qui ne contient pas moins de 200 pages — on est frappé du nombre relativement peu important d'études systématiques entreprises sur le mouvement du pendule considéré comme instrument de mesure du temps. La plupart des mémoires concernent, soit la détermination de la longueur du pendule simple à secondes, soit la comparaison de l'oscillation du pendule en différents points de la terre.

Cependant les auteurs de ces mémoires ⁽¹⁾ signalent presque tous, dans leurs expériences, des anomalies défiant tout essai d'explication par les théories ordinaires. « Ma conviction, écrit Baily ⁽²⁾, est que le pendule à couteau reposant sur des plans d'agate, tel qu'on le construit aujourd'hui, est en fait, un instrument très mal approprié aux délicates recherches auxquelles il a été originairement destiné ».

C'est qu'en effet, comme conséquence même de ce caractère si précieux de répétition presque indéfinie de son mouvement, le pendule est d'une très grande sensibilité vis-à-vis des effets perturbateurs qui peuvent s'exercer sur lui. On peut même dire que cet instrument est particulièrement propre à l'étude de ces très petites influences, fonction ou non de l'amplitude, qui, s'exerçant à chaque oscillation du pendule, finissent par produire un effet sensible et mesurable.

Mon but a été d'apporter dans cet ordre d'idées, une contribution nouvelle à l'étude du mouvement du pendule libre considéré comme instrument de mesure du temps.

Mais dans ce champ d'études très vaste, je me suis limité à l'étude de la première perturbation qui s'est présentée, celle produite par la suspension du pendule sous ses deux formes principales : la suspension à couteau et la suspension à ressort.

Nous verrons que cette étude particulière n'avait pas encore été faite de façon satisfaisante ; aussi je pense que les résultats obtenus, pourront être de quelque utilité pour l'application du pendule aux horloges et aussi, peut-être, pour les observations de la pesanteur.

Dans le but d'éclaircir le rôle exact de la suspension, j'ai été amené à faire une étude physique de la question et ainsi, à m'écarter, souvent, très notablement, des conditions ordi-

(1) BESSEL, SABINE, BAILY, etc. (Voir la collection des *Mémoires sur le pendule*).

(2) BAILY, *Phil. Trans.*, 1832, p. 399.

naires réalisées dans la pratique. C'est ainsi qu'une série d'expériences concernent le mouvement du pendule suspendu à un cylindre, et une autre, l'influence des très longues lames de suspension.

3. — Je crois pouvoir dire que certains résultats nouveaux n'ont pu être obtenus que grâce à la mise en œuvre dans toutes ces recherches, d'une méthode nouvelle d'observation comportant des qualités de rapidité et de souplesse que ne possède pas la méthode des coïncidences employées jusqu'ici. Il s'agit de la méthode photographique imaginée, en 1897, par G. Lippmann.

4. — Dans la première partie de ce travail, j'expose la méthode photographique et la réalisation que j'en ai faite au laboratoire et à l'Observatoire de Paris.

Les résultats que l'application de cette méthode m'a permis d'obtenir sont exposés : dans la deuxième partie, en ce qui concerne l'influence de la suspension à couteau ou à cylindre, et dans la troisième partie pour ce qui se rapporte à la suspension élastique.

Comme application du travail, je discute (chapitre IV) les conditions qui doivent être réalisées pour l'emploi du pendule libre dans la mesure du temps, et j'expose sommairement deux projets qui sont des applications immédiates de la méthode photographique : le premier donne le principe d'un nouveau garde-temps, formé par l'ensemble de deux pendules libres, le deuxième concerne la mesure directe des longitudes.

Dans une recherche sur le pendule, il est difficile de ne pas faire appel à la théorie. J'ai été amené, pour me rendre compte si certaines anomalies n'étaient pas explicables par les théories ordinaires, à développer des calculs quelquefois assez longs. Dans un but de clarté, j'ai allégé le texte de ces calculs en les rassemblant à la fin du mémoire sous forme de notes.

J'ai fait ce travail au Laboratoire des Recherches physiques

de la Sorbonne, sous la direction de M. Gabriel Lippmann ; mais je n'aurai pas la joie de voir mon éminent maître, assister à la soutenance de ma thèse qu'il avait lue et acceptée.

Ce grand savant était universellement respecté et admiré, et sa mort, survenue le 13 juillet 1921 pendant le voyage de retour du Canada de la mission Fayolle, dont il faisait partie, est une perte douloureuse et irréparable pour la Science.

En travaillant avec ce maître illustre, j'ai eu le bonheur de pouvoir apprécier ses hautes qualités d'esprit et de profiter de ses précieux conseils et de ses encouragements. J'adresse à sa mémoire un hommage ému d'admiration et de gratitude.

Je suis très reconnaissant à M. Kœnigs, professeur de mécanique physique à la Sorbonne, d'avoir bien voulu accepter de présider mon Jury de thèse.

A l'Observatoire de Paris, j'ai reçu le plus bienveillant accueil de MM. Baillaud, directeur de l'Observatoire, et Bigourdan, directeur du Bureau international de l'Heure, qui ont bien voulu s'intéresser à mes travaux ; je leur en exprime mes plus sincères remerciements.

Je me fais un agréable devoir de remercier aussi M. Boïnôt, astronome adjoint, pour l'aide précieuse qu'il m'a accordée.

A maintes reprises, M. Guillet, Maître de conférences, m'a fait profiter de sa grande expérience et de sa compétence particulière sur les questions touchant au pendule ; je tiens à lui dire toute ma reconnaissance. Je remercie bien vivement aussi, pour le bienveillant intérêt qu'ils m'ont toujours témoigné, M. Maneuvrier, directeur-adjoint, M. Aubert, chef de travaux, et M. Duffau, préparateur au Laboratoire.

CHAPITRE PREMIER

LA MÉTHODE PHOTOGRAPHIQUE

I. — Les deux problèmes dans les observations du pendule

Quel que soit le but qu'on se propose dans les observations du pendule, on n'a jamais à résoudre que l'un ou l'autre des problèmes suivants :

1^o Déterminer les phases simultanées de deux pendules : c'est le problème qui se pose tous les jours dans les Observatoires, où l'on compare les marches ou « états » des diverses horloges entre elles et avec l'horloge directrice. C'est aussi le principe de la mesure des longitudes : la différence de longitude entre deux lieux étant égale à la différence des heures locales en ces deux lieux, au même instant, sa mesure consiste à obtenir les phases simultanées de deux horloges réglées respectivement, en chacun de ces lieux, sur l'heure locale.

2^o Déterminer le rapport des durées d'oscillation de deux pendules : c'est le problème fondamental dans la mesure de l'intensité de la pesanteur, qu'il s'agisse d'une mesure absolue, en un lieu déterminé, ou d'une mesure relative pour comparer la pesanteur en deux lieux différents. Il consiste à chercher la durée de l'oscillation d'un pendule libre en comparant ses battements à ceux d'un garde-temps réglé sur le mouvement des astres, et qui enregistre lui-même le nombre total de ses oscillations.

Une méthode quelconque de détermination des phases simultanées est immédiatement applicable à la recherche du rapport des durées d'oscillations ; le second problème se

ramène au premier et il n'y aura pas lieu de les séparer dans la description des méthodes. Et d'abord, nous nous occuperons du principe de ces méthodes.

II. — Exposé théorique des méthodes d'observation (Méthode photographique et méthode des coïncidences).

Rappelons d'abord une représentation élémentaire classique : Quand un pendule effectue des oscillations infiniment petites — de telle sorte que la force qui le sollicite puisse être considérée comme proportionnelle à l'élongation — et que son amortissement est nul, si on développe l'arc décrit par un point du pendule (son centre de gravité par exemple) sur la ligne droite xOx_1 et si on trace une circonférence de rayon OA correspondant à l'amplitude du pendule, on peut toujours considérer un mobile M se déplaçant sur la circonférence d'un mouvement uniforme, et tel qu'à chaque instant la projection P de ce mobile sur l'axe Ox soit précisément la position du point considéré du pendule (fig. 1).

Il suffit, pour cela, que le mobile M soit animé de la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T étant la durée d'oscillation. La phase du pendule est l'angle α que le rayon vecteur OM fait, à l'instant t avec le rayon OB correspondant à la position d'équilibre.

Considérons une représentation analogue pour le deuxième pendule, de période $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$. Les deux problèmes que nous avons envisagés se ramènent aux suivants :

1^o Déterminer à un même moment les angles α et α' fixant les positions simultanées des mobiles M et M' qui représentent respectivement chacun des mouvements.

2^o Déterminer le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, des vitesses angulaires de ces deux mobiles,

1^o *Méthode photographique.* — Supposons qu'on fixe à

l'instant t la position des deux pendules P et P' par rapport à leur position respective d'équilibre et à leur élongation extrême ; on a immédiatement :

$$\alpha = \arcsin \frac{OP}{OA},$$

$$\alpha' = \arcsin \frac{O'P'}{O'A'}.$$

Les phases simultanées se trouvent déterminées.

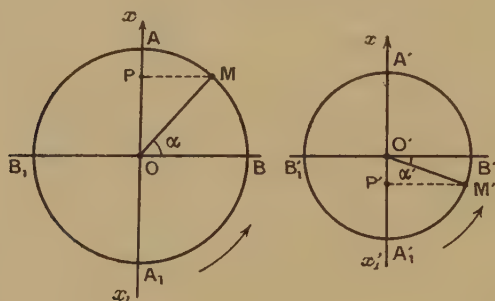


Fig. 1.

Il suffit pour cela, de faire une photographie instantanée d'un index qui repère la position de chacun des pendules et en même temps une photographie de l'amplitude de son oscillation.

Si l'on se propose d'appliquer cette méthode photographique à la détermination du rapport des durées d'oscillation des deux pendules, on opérera ainsi : on fixera leurs phases simultanées à des instants t et t_1 entièrement arbitraires, entre lesquels on aura compté n passages du premier pendule par sa position d'équilibre et n' passages pour le deuxième.

Soient α et α_1 les phases ainsi déterminées, pour le premier pendule, α' et α'_1 les phases pour le second. Pendant le temps qui s'est écoulé entre les deux photographies, le

mobile représentatif du premier mouvement a parcouru l'arc : $2\pi n + \alpha_1 - \alpha$, et l'autre a parcouru l'arc : $2\pi n' + \alpha'_1 - \alpha'$.

On a donc :

$$\frac{T}{T'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2\pi n' + \alpha'_1 - \alpha}{2\pi n + \alpha_1 - \alpha}.$$

Si l'on connaît le sens dans lequel se déplaçait chacun des pendules au moment des photographies instantanées, il ne peut y avoir ambiguïté pour la valeur absolue et le signe des phases qui entrent dans la formule.

Tel est le principe de la méthode photographique, due à M. G. Lippmann.

On ne voit aucune restriction à l'application de cette méthode. Les deux pendules peuvent être presque exactement synchrones (alors n est égal à n') ou bien ils peuvent avoir des périodes très différentes. Dans tous les cas la méthode est applicable.

Il y a plus ; son principe fait apercevoir une propriété précieuse. Les époques des deux photographies instantanées sont entièrement arbitraires ; elles ne dépendent en aucune façon de la marche particulière des pendules et la seule considération qui intervienne pour fixer l'intervalle de temps qui les sépare est l'obtention d'une précision suffisante. Alors, ayant fait choix de cet intervalle de temps, on peut commander automatiquement l'obtention des clichés et affranchir ainsi la méthode de toute cause d'erreur personnelle.

Elle possède en outre toutes les qualités des méthodes d'enregistrement ; en particulier, elle comporte l'inscription de l'amplitude de l'oscillation, facteur essentiel dans les observations pendulaires.

Nous préciserons plus loin tous ces avantages, mais de ces considérations où il ne s'agit encore que du principe, nous pouvons conclure qu'il est impossible de concevoir une méthode plus directe et plus générale.

Ce n'est pourtant pas, comme on sait, cette méthode qui a été employée jusqu'ici.

2^o *Méthode des coïncidences.* — La méthode classique pour les observations du pendule est celle des coïncidences, introduite en 1835 par de Mairan sous le nom de « méthode des concours » et employée depuis sous des formes très variées.

Elle consiste à observer les passages des mobiles M et M' par leur position respective d'équilibre B, B'. Quand ces passages ont lieu en même temps, dans le même sens, on dit qu'il y a coïncidence.

Supposons qu'on observe une coïncidence à l'instant t_0 (lu sur l'horloge à laquelle on compare généralement le pendule). On peut dire : « A l'instant t_0 les deux pendules étaient en phase ». Mais l'instant t_0 n'est pas en général celui où l'on veut connaître les phases simultanées des deux pendules, et il faut déduire de l'observation précédente la réponse à la question : « Quelle était, à un certain instant t la différence de phase des pendules ? » Cela exige une extrapolation qui suppose exactement connue la marche des pendules.

La méthode des coïncidences ne permet donc pas de réponse directe au problème de la détermination de la différence de phase.

Pour déterminer le rapport des durées d'oscillation de deux pendules, ayant assisté à une coïncidence, on attend qu'il s'en produise une autre, ou plusieurs autres, et on compte le nombre N des oscillations du pendule de période T qui ont eu lieu entre ces p coïncidences, c'est-à-dire au bout desquelles le deuxième pendule de période T', a pris une avance (par exemple) de p oscillations. On a alors :

$$\frac{T}{T'} = \frac{N+p}{N}.$$

On prend généralement $p = 1$.

Cette méthode peut être, comme on sait, très précise, mais sa valeur est sous la dépendance essentielle de la marche des deux pendules à comparer. Si ceux-ci sont imposés on n'est

pas maître du nombre d'oscillations qui s'écoule entre deux coïncidences et par conséquent du temps que dure l'expérience de comparaison.

Il résulte de ces premières considérations une supériorité incontestable, au moins au point de vue théorique, de la méthode photographique sur celle des coïncidences ⁽¹⁾.

Cette constatation suffit à faire comprendre l'intérêt que peut présenter un essai de réalisation pratique de la méthode photographique. Ce n'est qu'après cette réalisation et en présence des résultats obtenus que nous pourrions répondre à cette question essentielle : « La méthode photographique garde-t-elle encore sa supériorité dans l'application pratique ? »

III. — Réalisation de la méthode photographique.

1. — Dans une première partie d'une note à l'Académie des Sciences ⁽²⁾ M. Lippmann expose le principe de la méthode photographique, et propose pour obtenir les photographies fixant les phases simultanées des pendules, l'emploi de l'étincelle électrique. C'est en effet une source de lumière très intense et extrêmement brève avec laquelle on peut obtenir une photographie instantanée de l'index servant de repère au pendule.

Dans une deuxième partie, il indique que l'un des pendules peut commander lui-même la production de l'étincelle, qui éclaire ainsi périodiquement l'index du deuxième, observé dans un microscope à micromètre. Il s'agit alors d'une observation stroboscopique des deux pendules.

⁽¹⁾ Comme je me place, dans cette étude, au point de vue critique, et non au point de vue du développement historique des diverses méthodes d'observation du pendule, je laisse de côté la méthode des passages, moins précise que la méthode des coïncidences, et abandonnée aujourd'hui. Son principe est d'ailleurs un cas particulier de celui de la méthode photographique : c'est le cas où les phases qui limitent la période d'observation sont nulles, mais leur époque est déterminée avec une précision beaucoup moindre que celle donnée par une photographie instantanée.

⁽²⁾ *C. R.*, t. CXXIV, p. 125, 1897.

C'est à la réalisation pratique de la première de ces deux formes particulières de la méthode que je me suis attaché et mon but a été le suivant : Mettre au point un procédé aussi simple et précis que possible pour l'observation photographique des pendules, dans lequel ces derniers restent entièrement libres.

Le mode de réalisation dépend évidemment des conditions particulières que l'on s'impose. Dans les laboratoires et pour les observations de la pesanteur, on s'attache à avoir la plus grande précision possible, compatibles cependant avec un dispositif simple et commode. Dans les observations courantes à l'Observatoire, on cherche plutôt à simplifier la technique. De là des procédés qui peuvent présenter des différences sensibles.

Je décrirai d'abord le dispositif que j'ai construit et utilisé au Laboratoire.

2. — *Sources lumineuses.* — On veut obtenir, simultanément, une photographie instantanée d'un index fixé au pendule, et une photographie de l'amplitude de l'oscillation.

1° *L'étincelle.* — La photographie instantanée est obtenue à l'aide d'une étincelle condensée. C'est l'étincelle de décharge d'une grosse bouteille de Leyde dont les armatures communiquent aux bornes du secondaire d'une bobine d'induction. Cette bobine fonctionne par la rupture très brusque du courant primaire ; la coupure se fait entre du mercure recouvert d'alcool ou d'huile et une tige métallique manœuvrée à la main ou mieux, actionnée par un électro-aimant.

Les électrodes entre lesquelles éclate l'étincelle sont deux tiges de zinc. Si on les taille en pointe, l'étincelle présente bien le caractère de fixité qu'elle doit avoir, mais jamais un grand éclat. J'ai obtenu un bon résultat en taillant les extrémités des tiges en biseau. L'intervalle explosif est de l'ordre de 3 mm.

Comme généralement, les deux pendules à comparer ne sont pas placés l'un à côté de l'autre, on ne peut penser les

éclairer par la même étincelle. On réalise alors dans le circuit de décharge du condensateur, deux coupures, une devant chacun des pendules qui sont ainsi éclairés simultanément, par deux étincelles différentes.

2° *La source continue.* — Il faut, en outre éclairer chaque pendule pendant le temps d'une oscillation (pour la netteté des images, à cause de l'amortissement, il est bon de ne les éclairer que pendant cet intervalle de temps). Il est nécessaire pour cela de disposer d'une source d'un grand éclat.

J'ai d'abord utilisé une lampe Nernst dont je plaçais le filament aussi près que possible de l'éclateur. Mais dans ce cas, l'emploi d'un obturateur s'imposait. Je l'ai réalisé par un volet commandé par un électro-aimant et se déplaçant verticalement. Au moment de son fonctionnement, cet électro-aimant de faible résistance mettait en court-circuit un rhéostat monté en série avec la lampe, en sorte que celle-ci ne brillait d'un très vif éclat que pendant une ou deux secondes.

Plus tard, j'ai employé une lampe 1/2 watt, de 16 volts et 200 bougies, que je ne faisais fonctionner que pendant le temps nécessaire à l'obtention du cliché (la durée d'une période); l'obturateur est alors inutile.

La source lumineuse étant placée derrière l'éclateur, à la même hauteur, et très près de ce dernier, l'image de l'étincelle est projetée sur le plan d'oscillation du pendule par une lentille convenable, le grossissement devant être suffisant pour que quelle que soit la position de l'index pendant son mouvement, il soit atteint par la lumière. Je me suis servi d'une lentille de 2 cm. d'ouverture et de 12 cm. de distance focale. C'est l'image de l'étincelle qui seule est exactement au point sur le plan d'oscillation du pendule. On doit régler à l'aide d'un rhéostat, l'intensité lumineuse de la lampe de façon que les images produites par l'étincelle et la lampe soient, sur le cliché, également noires.

Devant chaque pendule, on dispose évidemment le même système d'éclairage, les lampes étant en dérivation sur la même source de courant.

3. — *L'index.* — J'ai d'abord utilisé comme repère du pendule une fente très fine, mais ce procédé peut obliger à trop modifier la structure du pendule ; d'autre part son application n'est pas générale car il n'est pas toujours possible de placer l'appareil photographique de l'autre côté du pendule par rapport à la source lumineuse.

J'emploie un index constitué par un fil cylindrique, vertical, de faible diamètre, collé sur la tige du pendule. C'est un fil de verre argenté, ou un petit tube de verre mince contenant du mercure, ou plus simplement une aiguille d'acier. Il n'est pas nécessaire que le diamètre soit d'une extrême finesse ; je le prends de l'ordre du demi-millimètre. Cet index fonctionne en effet comme un petit miroir cylindrique donnant de la source située à 1 mètre de distance environ une image très fine, de l'ordre de $\frac{1}{100}$ mm. et c'est cette image qui est photographiée.

Mais l'index réfléchit la lumière dans toutes les directions, en sorte que l'objectif n'en reçoit qu'une quantité très petite insuffisante pour impressionner une plaque photographique même très sensible. On augmente beaucoup la lumière reçue par l'objectif en courbant légèrement le fil, de façon que tout en continuant à être vu sous la forme d'une petite ligne lumineuse verticale, il joue le rôle d'une sorte de miroir concave rectiligne, concentrant les rayons vers l'objectif. Celui-ci reçoit ainsi environ 10 fois plus de lumière. C'est grâce à cet artifice que j'ai pu, après de nombreux insuccès, obtenir une impression nette sur le cliché.

4. — *Appareil photographique.* — Il doit être robuste, d'un maniement commode et rapide et en particulier pouvoir être mis facilement à la hauteur du faisceau réfléchi et à l'inclinaison voulue. La chambre photographique est montée à cet effet sur un support spécial à deux crémaillères. Elle est formée de deux boîtes rectangulaires coulissant l'une dans l'autre. La mise au point s'effectue par le déplacement relatif

de ces deux parties, ou mieux, par un déplacement à vis de tout l'appareil, parallèlement à lui-même (fig. 2).

L'objectif employé, a 20 cm. de distance focale et il est fortement diaphragmé ($\frac{f}{40}$).

En opérant dans une demi-obscurité, l'objectif peut rester ouvert pendant une longue expérience sans qu'il y ait crainte de voiler la plaque. Le châssis qui porte celle-ci peut se

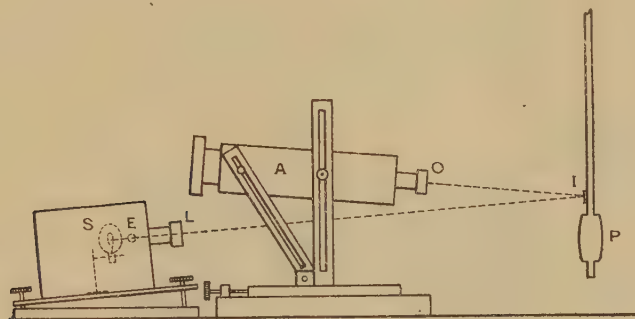


Fig. 2.

Schéma des appareils. — S, source continue ; E, éclateur ; L, lentille de projection ; I, index ; P, pendule ; O, objectif ; A, appareil photographique.

déplacer verticalement à la main à l'aide d'un système à crémaillère ; on peut ainsi prendre plusieurs photographies sur la même plaque.

5. — *Commande automatique.* — Dans le but de rendre l'application de la méthode aussi simple que possible là où elle devait être employée couramment, j'ai imaginé un dispositif permettant le déplacement automatique du châssis. Il rappelle l'échappement à chevilles et est représenté sur la figure 3. Les chevilles sont disposées en rangée verticale sur un côté du châssis, et l'ancre, formée d'une sorte de fourche rigide, ne laisse échapper successivement chacune d'elles que lorsqu'un électro-aimant l'actionne.

Nous avons déjà parlé d'un électro-aimant déclanchant

l'étincelle. Tous ces appareils sont commandés par une distribution simple de courant, à l'aide d'un contact tournant. Ces contacts étant disposés convenablement sur la périphérie d'un tambour, il suffit de mettre ce dernier en mouvement

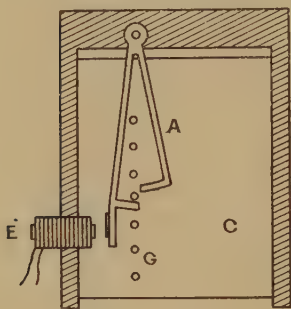


Fig. 3. — Dispositif de descente automatique de la plaque. — A, ancre ; E, électro-aimant ; G, goupilles ; C, châssis.

pour rendre automatiques, la production de l'étincelle, l'éclairage de la lampe pendant deux secondes, enfin le déplacement du châssis après la photographie. Je n'entre pas dans le détail des dispositifs que j'ai réalisés à ce sujet, car on peut les imaginer aisément. Il y a toujours avantage à employer la commande automatique, étant donnée d'ailleurs la simplicité de sa réalisation.

Cet avantage est très net, quand il s'agit de la détermination

du rapport des durées d'oscillation. Nous avons déjà dit, qu'étant maître de la durée de l'expérience, c'est-à-dire du nombre N d'oscillation des pendules dans l'intervalle des deux photographies, on pouvait se donner ce nombre *a priori*, en ne tenant compte que de la précision à obtenir, et en profiter pour rendre *entièrement automatique* l'application de la méthode. Il suffit pour cela de commander la mise en mouvement du tambour dont nous parlons plus haut, par un mouvement d'horlogerie de façon que les contacts qui assurent les différentes opérations, se reproduisent au bout de ce nombre déterminé N d'oscillation.

Si l'on veut faire des expériences dans des conditions variées, on peut réaliser un mouvement d'horlogerie dans lequel on modifie soit la vitesse de rotation, soit le nombre de tours qu'il fait entre deux contacts ; j'ai pu employer ainsi le même appareil pour des expériences très diverses.



Fig. 5.

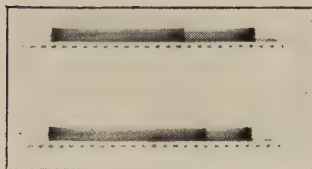


Fig. 13.

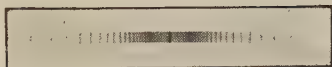


Fig. 18.



Fig. 15.

6. — *Obtention du cliché.* — Il faut obtenir une image nette et très fine de l'index; on devrait donc chercher à employer une plaque photographique à grains fins, mais on sait que la sensibilité de la plaque diminue à mesure que le grain devient plus fin; finalement, il y a plutôt intérêt à utiliser des plaques sensibles, ce qui d'ailleurs permet de diaphragmer l'objectif. J'ai employé surtout les plaques « Lumière violettes ». Le développement est lent, (au métal-hydroquinone, avec une notable proportion de bromure de potassium); il est préférable pour la finesse du trait, de l'arrêter dès que l'image apparaît.

J'obtiens ainsi des traits dont la largeur est inférieure au $\frac{1}{100}$ mm. et la précision du pointé au microscope n'est limitée que par la grosseur du grain de la plaque. Ce pointé se fait avec une erreur inférieure au $\frac{1}{200}$ mm.

Supposons qu'on ait fait éclater une étincelle, et qu'on ait éclairé l'index pendant le temps d'une oscillation, le cliché développé a l'aspect qui est reproduit ci-dessous (fig. 4, voir aussi figure 5 planche I). On y observe une image très fine de l'index, produite à la lueur de l'étincelle et une bande grise devenant de plus en plus sombre vers ses extrémités où elle est limitée d'une façon très nette. On a avec cette bande une sorte d'enregistrement photométrique de la vitesse du pendule. Aux environs de la position d'équilibre, la vitesse étant maximum, l'impression est minimum. Au contraire, l'impression la plus forte se produit aux extrémités de la course du pendule, là où la vitesse diminue de plus en plus, pour s'annuler et changer de sens.

7. — *Mesure du cliché.* — Si l'on se rapporte à ce que nous avons dit du principe de l'obtention de la phase correspondant au moment où l'étincelle a éclaté; on voit qu'il faut déduire de l'examen du cliché le rapport de l'élongation à l'amplitude. Soient a et b les distances du trait

intermédiaire aux traits extrêmes, l'élongation a pour valeur $\frac{a-b}{2}$ et l'amplitude $\frac{a+b}{2}$.

La phase cherchée est donc :

$$\text{arc sin } \frac{a-b}{a+b}$$

Il faut mesurer a et b . J'ai employé plusieurs méthodes dont je parlerai rapidement :

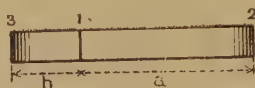


Fig. 4.

a) Je me suis servi d'abord pour des mesures très précises, de la machine à mesurer à vis micrométrique, préalablement étalonnée. Je signale une difficulté tenant au fait que pour éviter le « temps perdu » de la vis on est obligé de déplacer le chariot toujours dans le même sens : les pointés ne peuvent se faire dans les mêmes conditions pour les deux bords. Cette dissymétrie peut entraîner une légère erreur de mesure.

b) Le procédé suivant m'a toujours donné d'excellents résultats, il est d'une installation simple, et peut remplacer avantageusement une machine à diviser :

On projette l'image très réduite (au $\frac{1}{10}$) d'une règle divisée AB (en 1/2 millimètres par exemple) sur le plan vertical de la plaque A'B', à l'aide d'un objectif O (fig. 6) ; de préférence, celui qui a servi à l'obtention du cliché. A l'aide d'un microscope à grossissement moyen ou d'une forte loupe que l'on peut déplacer tout le long de A'B', on lit les divisions de l'image de la règle sur lesquelles se trouvent les images de l'index.

Dans les conditions que nous indiquons, les divisions successives de l'image de la règle correspondent au $\frac{1}{20}$ de millimètre ; l'observation au microscope donne le $\frac{1}{16}$ de division, soit le $\frac{1}{200}$ de millimètre.

Nous n'avons pas à calculer la valeur absolue des longueurs, mais seulement leur rapport ; il s'ensuit que la connaissance du facteur de réduction de la règle n'est pas nécessaire.

Pour éclairer l'endroit de la règle qui correspond au point du cliché que l'on observe, il est commode de réaliser matériellement la droite SOM à l'aide d'un bras horizontal, mobile autour d'un axe projeté en O portant à l'une de ses extrémités une source lumineuse S et à l'autre le microscope ; ce système mobile doit être entièrement indépendant du système de projection, lequel doit rester absolument fixe.

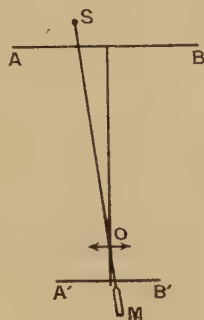


Fig. 6.

Voici les avantages que j'ai trouvés à cette méthode.

1^o La règle AB étant exactement divisée et ne comportant certainement pas d'erreur de l'ordre du $\frac{1}{10}$ de millimètre, son image A'B' est un excellent micromètre au $\frac{1}{100}$ de millimètre.

2^o L'observation est commode et rapide car les déplacements du microscope se font très aisément.

3^o Les conditions de dissymétrie reconnues dans l'observation à la machine à diviser n'existent plus ici, on peut faire le pointé dans les mêmes conditions pour les images extrêmes.

4^o Si l'objectif a des défauts qui déforment les images, on conçoit que l'erreur qui résulte de ce fait puisse être en

grande partie éliminée par l'emploi de ce même objectif pour l'obtention de l'image de la règle.

5° Enfin ce procédé de mesure permet d'éliminer simplement l'erreur due à ce que le plan d'oscillation du pendule peut n'être pas parallèle rigoureusement au plan de la plaque photographique. Nous discuterons plus loin cette cause d'erreur et indiquerons alors de quelle manière elle peut disparaître grâce à cette méthode particulière de mesure.

c) Dans les déterminations qui n'exigent pas la mesure des distances a et b avec la précision du $\frac{1}{100}$ de millimètre, on peut simplifier beaucoup la mesure du cliché, en photographiant en même temps que l'index du pendule, une petite règle divisée dont on forme l'image, horizontale, à la hauteur exacte de celle de l'index.

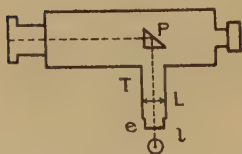


Fig. 7.

La chambre photographique porte un tube latéral T (figure 7), à l'extrémité duquel est disposée la petite règle divisée transparente e éclairée par une source lumineuse L . La lentille L et le prisme à réflexion totale P , permettent d'obtenir l'image de la

règle sur la plaque photographique.

La lecture de a et b est alors directe. Dans un très grand nombre de mes expériences où l'approximation exigée dans la détermination du rapport des durées d'oscillation ne dépassait pas le $\frac{1}{100.000}$, j'ai employé ce dispositif. Je m'en suis servi aussi à l'Observatoire. On trouvera, planche I, une reproduction d'un cliché obtenu ainsi.

d) On peut même, quand il s'agit de pendules entretenus comme ceux de l'Observatoire, concevoir une méthode plus directe encore, grâce à laquelle tout calcul est supprimé, et qui donne directement la phase. On remarque en effet que

l'amplitude du balancier reste remarquablement constante.

Imaginons alors une règle graduée en « phases » par rapport à son milieu O , c'est-à-dire telle qu'en un point P de cette règle, on lise la valeur de arc $\sin \frac{OP}{OA}$ (A étant l'une des extrémités de la règle), ou, mieux encore, cette valeur de la phase réduite en temps, et exprimée par exemple en centièmes de seconde. Projetons cette règle placée en e dans le dispositif précédent, sur la plaque photographique et de telle sorte que ses extrémités correspondent exactement aux élongations extrêmes de l'image de l'index (ce que la constance de l'amplitude permet d'obtenir une fois pour toutes); alors, sur le cliché nous lirons directement, pour la position du trait intermédiaire, la phase du pendule en centièmes de seconde.

8. — *Précision de la méthode.* — 1° La phase instantanée d'un pendule battant la seconde peut être obtenue à l'approximation du $\frac{1}{10,000}$ de seconde.

Supposons que chaque longueur a, b , soit déterminée avec une erreur maximum δa (le double de l'erreur de pointé de l'image) l'erreur sur le rapport $\frac{a-b}{a+b}$ sera :

$$\frac{2(a-b)}{(a+b)^2} \cdot \delta a \text{ si les erreurs sur } a \text{ et } b \text{ sont de même sens.}$$

$$\frac{2}{a+b} \cdot \delta a \text{ si ces erreurs sont de sens contraire.}$$

Le sinus de la phase sera donc toujours connu avec une erreur absolue inférieure à $\frac{\delta a}{u_0}$, si u_0 est l'amplitude mesurée sur le cliché : $\left(u_0 = \frac{a+b}{2}\right)$.

Par suite, l'erreur correspondante sur la phase sera sensiblement :

$$\frac{\delta a}{u_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{u_0^2}}}$$

u étant l'élongation mesurée : $\left(u = \frac{a-b}{2}\right)$.

Il y aura donc intérêt — ce qui est d'ailleurs évident — à photographier le pendule aussi près que possible de sa position d'équilibre, et il sera désavantageux de se servir d'une image intermédiaire trop voisine d'une image extrême. En fait, cependant, on pourra utiliser des images de l'index assez éloignées de la position d'équilibre. Par exemple l'erreur absolue n'est que doublée si au lieu de fixer la phase au voisinage de la position d'équilibre, on utilise pour la déterminer une élongation égale aux $\frac{86}{100}$ de l'amplitude.

Plaçons-nous par exemple dans le cas des expériences les plus précises faites au laboratoire. Les pointés du trait se font à l'approximation du $\frac{1}{200}$ mm. ; les longueurs a et b sont donc connues à $\frac{1}{100}$ mm. près. Si l'amplitude mesurée sur le cliché est 3 cm. la phase du pendule, déterminée je suppose, au voisinage de la position d'équilibre, sera connue à $\frac{1}{3.000}$ de radian près. Cela correspond, pour un pendule qui bat la seconde, à une approximation de $\frac{1}{3.000\pi}$ seconde. Soit à peu près $\frac{1}{10.000}$ seconde.

Dans les expériences à l'Observatoire, avec les moyens rapides de lecture que nous avons exposés plus haut, on ne peut compter que sur le $\frac{1}{10}$ mm. pour a et b . Il en résulte une approximation du $\frac{1}{1.000}$ de seconde dans la phase, ce qui, d'ailleurs, est plus que suffisant.

2° *Une expérience qui ne dure que quelques minutes permet d'obtenir le rapport des durées d'oscillation de deux pendules battant sensiblement la seconde, à l'approximation du millionième.* — Rappelons qu'on détermine les phases simultanées des deux pendules à des époques arbitraires, séparées par un nombre d'oscillations N de l'un d'eux (le même pour les deux pendules s'ils ont des périodes voisines).

L'erreur possible sur la phase est de l'ordre de : $\frac{\delta a}{u_0}$.

L'arc (sensiblement $2\pi N$) parcouru par le mobile fictif qui représente le mouvement d'un des pendules, est connu avec une erreur relative égale à : $\frac{\delta a}{\pi N u_0}$,

Par suite, l'erreur relative sur le rapport des durées est :

$$\frac{2\delta a}{\pi N u_0}.$$

Elle est inversement proportionnelle au nombre d'oscillations N comprises entre les deux photographies instantanées.

Appliquons ces considérations au cas où le pointé se fait au $\frac{1}{200}$ mm. Cherchons la durée de l'expérience nécessaire pour obtenir l'approximation du millionième.

On a : $u_0 = 3 \text{ cm.}$ et $\frac{\delta a}{u_0} = \frac{1}{3\,000\pi}$

d'où : $10^{-6} = \frac{2}{3\,000\pi N}$ et $N = 200$ environ.

L'oscillation double se faisant en 2 secondes, l'expérience dure de 6 à 7 minutes. Or nous avons admis que toutes les erreurs s'ajoutaient. Pratiquement, il se produit des compensations et nous pouvons dire que cette approximation du millionième peut être obtenue en 3 minutes seulement, comme le montrent d'ailleurs les expériences que nous relatons plus loin.

9. — *Contrôle de la valeur du résultat. Possibilité d'obtenir une moyenne de plusieurs déterminations simultanées.* — Au lieu de ne faire éclater qu'une seule étincelle, produisons-en plusieurs pendant le cours d'une oscillation. Supposons par exemple, que nous ayons ainsi photographié les pendules, aux instants voisins t_0 et t_1 pendant leur première oscillation et aux instants t_2 et t_3 pendant leur $N^{\text{ième}}$ oscillation; nous pouvons considérer les combinaisons suivantes : (t_0, t_2) , (t_0, t_3) , (t_1, t_2) , qui sont distinctes. Ainsi la détermination des quatre elongations pour chaque pen-

dule, nous fournira trois valeurs distinctes du rapport de durée des périodes.

En général, si nous produisons p étincelles au lieu d'une seule, la détermination des $2p$ phases correspondantes nous fournira $2p - 1$ valeurs distinctes, indépendantes du rapport des durées, dont la comparaison sera un contrôle précieux de la valeur du résultat.

10. — *Le sens de déplacement du pendule peut se déduire de l'observation du cliché.* — Il y a un autre avantage à produire ainsi plusieurs images de l'index : On peut en déduire le sens de déplacement du pendule au moment des étincelles.

A une position quelconque du pendule, définie par l'image de l'index, correspondent deux phases distinctes selon le sens de déplacement du pendule. Il est donc essentiel de connaître ce sens.

On peut l'observer directement. On fait éclater les étincelles, par exemple quand les deux pendules vont tous deux dans une direction déterminée.

Si cela n'est pas possible, on peut toujours opérer ainsi : on fait éclater une série d'étincelles espacées de façon qu'elle présente une certaine dissymétrie dans le temps. Par exemple on peut produire deux étincelles voisines, puis une troisième, après un intervalle de temps nettement plus grand. On conçoit comment un simple examen des images obtenues, puisse donner immédiatement le sens de déplacement des pendules.

11. — *Les causes d'erreur dans la méthode photographique.* — Dans la discussion de l'approximation obtenue, nous n'avons tenu compte que de l'erreur de pointé des images.

Cherchons si d'autres causes d'erreur ne peuvent intervenir. En d'autres termes, proposons-nous de discuter si le rapport $\frac{a-b}{a+b}$ qu'on déduit des mesures du cliché, est bien le rapport de l'élongation à l'amplitude :

1° Une première observation à faire, est que nous mesurons les segments a et b suivant la corde au lieu de les mesurer suivant l'arc décrit par l'extrémité de l'index. L'erreur absolue qui en résulte dans la détermination de l'élongation θ : à savoir $\frac{l\theta^3}{6}$, (l étant le rayon de l'arc décrit par l'index) est en général très petite et n'atteint qu'exceptionnellement le $\frac{1}{200}$ de mm. Nous n'en tiendrons donc pas compte ;

2° L'image de l'index donné par l'étincelle est un trait net et fin ; les images extrêmes sont au contraire des bandes grises nettement limitées vers l'extérieur. Alors que l'on pointe le milieu du trait intermédiaire, ce sont les bords de l'amplitude que l'on repère en sorte que la valeur mesurée pour l'amplitude est toujours un peu trop grande (d'une quantité qui est égale à la moitié de l'épaisseur du trait). Comme cette erreur intervient dans les calculs pour les deux pendules et qu'elle est fort petite, nous la négligerons.

3° Ce que l'on photographie ce n'est pas l'index lui-même, mais l'image qu'il donne de la source lumineuse et cette image, vue de l'objectif, se déplace dans le sens du mouvement d'une petite quantité, par rapport au pendule.

Mais ce déplacement est proportionnel à l'élongation ; par suite quand nous prendrons le rapport de l'élongation à l'amplitude, son influence sera nulle.

4° Nous calculons la phase par l'expression

$$x = \arcsin \frac{OP}{OM} = \arcsin \frac{a - b}{a + b}.$$

Or, cela suppose que la position d'équilibre O du pendule est exactement au milieu du segment AA_1 (voir fig. 1), ce qui n'est pas réalisé puisque le pendule s'amortit.

Mais, pratiquement, nous pouvons admettre, que de la valeur $OA_1 = u_0$ à la valeur $OA = u_1$ le rayon OM a varié

en fonction du temps suivant une loi linéaire. Posons $u_0 - u_1 = \Delta u$, nous trouvons aisément :

$$OP = \frac{a - b}{2} - \frac{1}{2} \Delta u,$$

$$OM = \frac{a + b}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \Delta u.$$

Dans la plupart des expériences, qui exigeaient une précision très grande, la variation Δu était $< \frac{1}{100}$ mm, et je n'avais pas à tenir compte de la correction précédente. Dans le cas où elle pouvait être sensible, il s'est trouvé le plus souvent que la précision nécessaire était moindre et que cette correction était encore inutile. Dans les cas exceptionnels où elle intervient, les formules précédentes permettent de l'obtenir ; on y remplace α par sa valeur non corrigée ;

5° Il nous reste à examiner la seule cause d'erreur qui peut avoir quelque importance si on n'y prend pas garde. Il doit y avoir similitude exacte entre les positions des images sur le cliché et les positions correspondantes réelles de l'index du pendule. Or cela n'a lieu que si le plan P' de la plaque photographique est rigoureusement parallèle au plan d'oscillation P du pendule.

Supposons que cette condition ne soit pas réalisée. Soient α l'angle des deux plans, AB la course du pendule, E sa position d'équilibre et EC l'élongation au moment d'une étincelle. L'objectif O donne une image A'B' dans le plan P'. Sur le cliché nous mesurons (figure 8) :

$$\frac{B'C' - C'A'}{B'C' + C'A'} = \frac{a' - b'}{a' + b'}$$

alors que le rapport réel de l'élongation à l'amplitude est :

$$\frac{BC - CA}{BC + CA} = \frac{\alpha' - b}{\alpha + b}.$$

L'angle α étant petit on établit facilement la relation suivante :

$$\frac{a' - b'}{a' + b'} = \frac{a - b}{a + b} \pm \frac{2\alpha}{l} \frac{a'b'}{a' + b'}$$

l étant la distance de l'objectif à la plaque photographique. Le double signe correspond pour un sens donné de l'angle α , à la position du point C d'un côté ou de l'autre par rapport à la position d'équilibre.

L'erreur possible provenant du défaut de parallélisme :

$$\frac{2\alpha}{l} \frac{a'b'}{a' + b'}$$

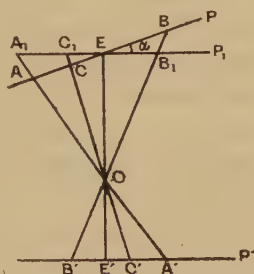


Fig. 8.

est maximum pour $a' = b'$, c'est-à-dire précisément quand les conditions sont les meilleures pour déterminer la phase. Il est donc intéressant d'avoir l'ordre de grandeur de cette erreur et de chercher à l'éliminer.

Nous avons admis une erreur absolue de $\frac{1}{3.000}$ de radian dans la phase par suite de l'incertitude des pointés. Pour que l'erreur que nous étudions actuellement n'intervienne pas il faut :

$$\alpha < \frac{1}{3.000} \cdot \frac{l}{a}$$

Admettons $l = 30$ cm. et $a = 3$ cm., nous obtenons :

$$\alpha < \frac{1}{300}$$

C'est là une condition dont la réalisation est assez délicate parce que le plan d'oscillation est un plan fictif.

On peut, dans une installation définitive réaliser le réglage une fois pour toutes de façon à n'avoir plus à se préoccuper de cette cause d'erreur, mais il est bon d'avoir

un moyen simple à sa disposition dans le cas où l'on a à monter et à régler rapidement les appareils. Je me suis servi à cet effet de deux règles plates en forme de T dont les tiges étaient associées de façon à glisser l'une sur l'autre, en sorte que les règles extrêmes perpendiculaires aux deux premières restaient toujours parallèles entre elles. L'une de ces règles étant appliquée sur la chambre photographique parallèlement au châssis, l'autre déterminait la direction du plan d'oscillation du pendule. Et en même temps, si la distance convenable des règles était fixée une fois pour toutes, en faisant osciller le pendule à une distance déterminée — 1 mm. par exemple — de la deuxième, on obtenait une mise au point immédiate de l'image de l'index.

Pratiquement ce moyen simple suffit dans la plupart des cas. Cependant pour des mesures très précises il est bon de s'assurer que la cause d'erreur dont nous parlons a disparu.

Il est facile de le faire, au moins dans les cas où l'on peut à volonté arrêter et relancer les pendules.

Il suffit de photographier l'index alors que le pendule est au repos, et sans toucher au châssis de prendre la photographie de l'amplitude. La décroissance des oscillations étant en général très petite, les deux valeurs de l'amplitude que l'on mesure de part et d'autre de la position d'équilibre devront être égales si la condition de parallélisme est réalisée. De l'écart entre ces valeurs on peut déduire l'angle α , et faire les corrections, si elles sont nécessaires.

Le moyen de mesure dont nous avons parlé plus haut, et qui consiste à faire une règle divisée très précise par réduction optique, nous permet une élimination de cette cause d'erreur. En effet on conçoit que si la règle dont on projette l'image fait elle-même un angle (α') convenable avec le plan du cliché, on peut compenser exactement la première erreur par une erreur de même nature.

l' étant la distance de l'objectif de projection au cliché que

l'on mesure le même calcul que celui fait précédemment s'applique et l'erreur introduite par α' est en valeur absolue :

$$\frac{2\alpha'}{l'} \frac{a'b'}{a' + b'}$$

et il y aura compensation si le sens d'orientation de la règle est convenable et si la condition :

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha'}{l'}$$

est réalisée.

L'angle α' qui détermine l'orientation de la règle s'obtient très facilement ainsi : On mesure les deux amplitudes de part et d'autre de la position d'équilibre repérée sur le cliché et on modifie l'inclinaison de la règle jusqu'à ce que le faible écart qui peut exister s'annule. Il ne s'agit que d'un léger tâtonnement après lequel l'appareil de mesure élimine la cause d'erreur due au parallélisme, alors même qu'on n'a pas pris de soin spécial pour la supprimer par un réglage préalable.

12. — Nous venons de faire un examen très rigoureux des différentes causes d'erreur que comporte la méthode. La seule qui ait quelque importance est la dernière.

Mais il faut remarquer que ces erreurs possibles ne sont à considérer que dans les cas où l'on se propose d'obtenir l'extrême précision dont nous avons parlé et qu'il n'y a jamais à dépasser, le millionième dans la détermination du rapport des durées d'oscillation.

Il est remarquable, surtout si on fait la comparaison avec la méthode des coïncidences, d'atteindre cette précision en un temps relativement si court (3 minutes) même si elle n'est obtenue qu'au prix de quelques soins. Pratiquement d'ailleurs, le plus souvent, il n'y a pas à dépasser le $\frac{1}{1.000}$ de seconde dans la détermination des phases et le $\frac{1}{100.000}$ dans celle des durées, et alors aucune erreur n'est à craindre.

13. — *Exemple d'application numérique.* — Voici, pris au hasard, le calcul d'une comparaison des durées d'oscillation de deux pendules. Il s'agit de deux pendules libres, à couteau.

L'expérience a duré pendant 100 oscillations de chacun des pendules, soit environ 3 minutes (la durée de l'oscillation est environ 1 sec. 86).

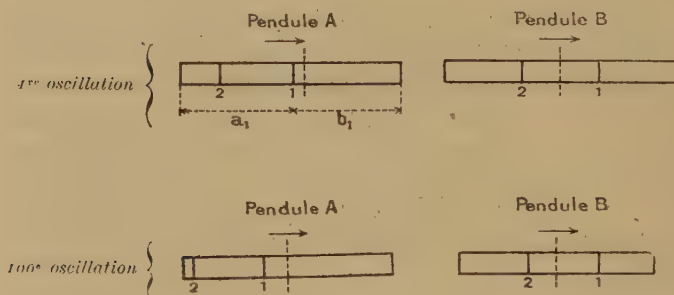


Fig. 9.

Je donne à titre d'exemple la disposition des images (fig. 9) et le détail du calcul. Les longueurs a et b sont mesurées en une unité arbitraire (sensiblement le $\frac{1}{2}$ mm.) et les phases calculées en grades (1).

Pendant la première oscillation, deux étincelles voisines ont photographié les pendules. De même pendant la 100^e oscillation. Nous pouvons donc déduire des observations trois valeurs du rapport des durées.

(1) Avec les grades, les calculs sont plus simples qu'avec les degrés.

1^{re} oscillation :

PENDULE A

$$\text{Etincelle 1} \begin{cases} a_1 = 13,602 \\ b_1 = 14,420 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = 1^{\circ} 859$$

$$\text{Etincelle 2} \begin{cases} a_2 = 4,130 \\ b_2 = 23,892 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = 49^{\circ} 832$$

PENDULE B

$$\text{Etincelle 1} \begin{cases} a_1 = 19,545 \\ b_1 = 7,884 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = 27^{\circ} 950$$

$$\text{Etincelle 2} \begin{cases} a_2 = 9,453 \\ b_2 = 17,937 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = 26^{\circ} 020$$

100^e oscillation :

$$\text{Etincelle 1} \begin{cases} a_1 = 10,692 \\ b_1 = 16,670 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = 14^{\circ} 022$$

$$\text{Etincelle 2} \begin{cases} a_2 = 1,780 \\ b_2 = 25,582 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = 67^{\circ} 160$$

$$\text{Etincelle 1} \begin{cases} a_1 = 18,017 \\ b_1 = 8,547 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} = 23^{\circ} 250$$

$$\text{Etincelle 2} \begin{cases} a_2 = 7,250 \\ b_2 = 19,287 \end{cases}$$

$$\text{arc sin } \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} = 29^{\circ} 940$$

Faisons alors les combinaisons suivantes :

Image 1 de la 1^{re} oscillation et image 1 de la 100^e.

$$\begin{array}{ccc} \text{—} & 1 & \text{—} \\ \text{—} & 2 & \text{—} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \text{—} \\ & 2 & \text{—} \end{array}$$

Nous obtenons trois résultats distincts. On les calcule en tenant compte du sens dans lequel allaient les pendules (ce sens est donné par les flèches).

$$1) \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{100 \times 400 - 27,950 + 23,250}{100 \times 400 + 1,859 - 14,022} = 1,0001865$$

$$2) \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{100 \times 400 - 27,950 - 29,865}{100 \times 400 + 1,859 - 67,160} = 1,0001874$$

$$3) \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{100 \times 400 + 20,020 - 29,865}{100 \times 400 + 49,832 - 67,160} = 1,0001871$$

La moyenne de ces trois valeurs : 1,000187 est le rapport des durées d'oscillation des deux pendules, dans les limites considérées de l'amplitude, à l'approximation du millionième.

Les phases utilisées pour le calcul ont été très variées ; la précision reste excellente, malgré l'emploi de phases de 49° et 67° , ce qui prouve que pratiquement on n'aura pas à se préoccuper de faire éclater les étincelles au moment du passage des pendules par leur position d'équilibre.

En trois minutes, nous avons donc obtenu une valeur du rapport des durées d'oscillation, exacte au millionième comme moyenne de trois déterminations, et cela sans avoir fait de réglage préalable, délicat.

Toutes les expériences de précision, analogues à la précédente, que j'ai faites, ont confirmé ce que la discussion théorique pouvait permettre d'attendre de la méthode.

14. — *Autre forme d'application de la méthode.* — Montrons que la détermination directe de l'amplitude n'est pas indispensable et qu'en photographiant les pendules, au repos, puis à l'aide de trois étincelles successives, dans le cours d'une oscillation, il est possible d'obtenir les phases simultanées (au moins dans le cas particulier où les périodes sont voisines).

Soient $x_1 x_2 x_3$ les élongations mesurées, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ les phases correspondantes et x_0 l'amplitude du premier pendule ; de même $y_1 y_2 y_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, et y_0 les quantités correspondantes pour le deuxième pendule.

On a les relations :

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_0 \sin \alpha_1 & y_1 = y_0 \sin \beta_1 \\ x_2 = x_0 \sin \alpha_2 & y_2 = y_0 \sin \beta_2 \\ x_3 = x_0 \sin \alpha_3 & y_3 = y_0 \sin \beta_3 \end{array}$$

D'autre part, si on connaît la marche *approximative* des deux pendules, on peut écrire des relations entre les phases.

Plaçons-nous dans le cas, très souvent réalisé, où les périodes sont voisines ; on a très sensiblement :

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 = u \\ \alpha_3 - \alpha_2 &= \beta_3 - \beta_2 = v\end{aligned}$$

Il n'y a pas de difficulté à résoudre les équations précédentes, de façon à en tirer les phases simultanées inconnues (α_2 et β_2 par exemple).

On trouve :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x_2 \sin u}{x_1 - x_2 \cos u} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{y_2 \sin u}{y_1 - y_2 \cos u}$$

en posant

$$\cos u = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 - 1}{b} - b \right)$$

avec :

$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 y_3 - x_3 y_2} \quad \text{et} \quad b = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_2 y_3 - x_3 y_2}$$

Les calculs sont plus longs, mais la technique est plus simple que pour le premier mode de réalisation. D'autre part, tous les pointés se faisant sur des traits de même nature, une plus grande précision est possible. Cette forme d'application m'a donné de très bons résultats.

IV. — La méthode des coïncidences. — Sa comparaison avec la méthode photographique.

1. — Il est nécessaire, pour voir apparaître plus nettement les qualités de la méthode photographique, de faire une étude comparée de cette méthode et de celle des coïncidences.

Jusqu'ici nous n'avons envisagé la méthode des coïncidences que du point de vue théorique et nous avons simplement signalé que sa différence essentielle avec l'observation photographique est que les conditions de son application et la précision qu'elle permet d'obtenir, sont sous la dépendance étroite de la marche relative des deux pendules, cette dépendance étant généralement un sérieux inconvénient.

Prenons par exemple le cas précédent : le rapport des durées d'oscillation des deux pendules est : 1.000187.

Si nous avons appliqué la méthode des coïncidences l'expérience aurait duré

$$\frac{1,86}{0,000187} \text{ secondes.}$$

Soit 2 heures 47 minutes environ.

Il aurait fallu attendre, entre deux coïncidences, 5.000 oscillations doubles des pendules.

La précision de l'observation, dans ces conditions, est d'ailleurs très suffisante : Pour obtenir le millionième dans le rapport des durées, il suffit en effet que l'incertitude sur le moment de la coïncidence corresponde à moins de 25 oscillations, ce qui est très possible, mais, pour obtenir cette précision qu'il est inutile de dépasser, l'observation des pendules doit durer pendant un temps 50 fois plus long que celui qui correspond à la méthode photographique.

Il peut arriver, dans certains cas, que la durée de l'expérience des coïncidences, absolument imposée par l'écart de durée des deux pendules, soit une raison d'impossibilité d'application de la méthode. Au contraire, plus les durées d'oscillations des deux pendules sont voisines, plus l'application de la méthode photographique est commode.

Pour préciser la comparaison, il est nécessaire d'appliquer simultanément les deux procédés d'observation.

Nous ne ferons pas l'historique du développement de la méthode des coïncidences⁽¹⁾. Les différents expérimentateurs qui l'ont employée, Borda, Bessel, Defforges, etc., l'ont successivement perfectionnée dans le même but : rendre à la fois plus commode et plus précise l'observation des coïncidences. Nous nous bornerons à la décrire sous la forme qui nous a servi à faire des expériences simultanées avec les deux méthodes.

(1) Voir par exemple : COLLET, *Bulletin de la Société Statistique du département de l'Isère*, 4^e série, t. I, 1892.

2. *Expériences simultanées et comparées par la méthode photographique et la méthode des coïncidences.*—Voici comment se fait l'observation des coïncidences: Les rayons issus d'une source lumineuse S (le filament rectiligne d'une lampe à incandescence) traversent une lentille L , sont réfléchis sur un petit miroir m collé au premier pendule et viennent former en O une image nette sur un écran opaque. En ce point, est percé dans l'écran un petit trou dont le diamètre correspond à la largeur de l'image. Les rayons lumineux qui ont traversé ce trou sont repris par la lentille L' qui donne de O une image O' , sur un écran porté par le deuxième pendule. En ce point se trouve encore un petit orifice que les rayons traversent pour atteindre le viseur V , mis au point sur O' (fig. 10).

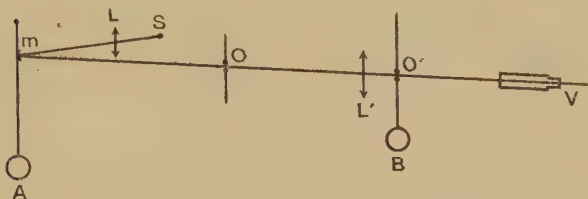


Fig. 10.

On observe à la fois les vraies et les fausses coïncidences au moment de l'apparition d'un ou plusieurs éclairs dans le viseur.

Le moment de la coïncidence s'obtient en prenant la moyenne entre les instants du premier éclair et du dernier.

Proposons-nous d'appliquer simultanément les deux méthodes au problème suivant: On fait osciller deux pendules; suivre, à mesure qu'ils s'amortissent, la façon dont varie le rapport de leurs durées d'oscillation.

Nous avons intérêt, dans ce problème, à multiplier le plus possible les observations c'est-à-dire à les séparer par l'intervalle de temps minimum compatible avec une préci-

sion donnée. Proposons-nous d'obtenir l'approximation du millionième et plaçons-nous dans les conditions où nous savons que la méthode photographique la donne avec certitude, c'est-à-dire attendons entre deux photographies successives que les pendules aient effectué 200 oscillations doubles. Réglons donc les pendules de façon qu'ils donnent une coïncidence au bout de 200 oscillations environ; de cette façon il sera possible d'appliquer simultanément les deux méthodes.

Remarquons en passant, que l'obligation de ce réglage pour adapter la méthode des coïncidences au problème actuel est un inconvénient, car il aurait pu se faire que ce réglage eût été impossible.

Considérons en détail la première mesure :

Dans un premier intervalle, l'un des pendules ayant effectué 212 oscillations, on obtient comme rapport des durées d'observation, moyenne de trois valeurs de ce rapport concordant à 10^{-6} près, le nombre $\frac{T_A}{T_B} = 0,997682$ par la méthode photographique.

En même temps qu'on commande les étincelles, on observe les éclairs des coïncidences. On trouve qu'il y en a 9, à chaque coïncidence, l'intervalle de deux éclairs successifs correspondant à $\frac{1}{2}$ oscillation des pendules. Quelle est l'incertitude sur le moment exact de la coïncidence ? On peut dire qu'elle s'est produite entre le 4^e et le 5^e éclair et admettre, par suite, une incertitude correspondant à $\frac{1}{4}$ d'oscillation double.

On trouve d'autre part pour le nombre d'oscillations N séparant deux coïncidences successives (l'une fausse, l'autre vraie) la valeur : $N = 215$ avec une incertitude n double de la précédente (à cause des deux observations) : $n = \frac{1}{2}$.

Il suit de là que le rapport des durées est :

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{215}{215 + 0,5} = 0,99768$$

avec une erreur possible $\frac{n}{N^2}$ de l'ordre du $\frac{1}{100.000}$.

Le tableau suivant montre que l'écart entre les nombres trouvés par les deux méthodes ne dépasse pas l'erreur théorique. Il n'a d'ailleurs d'autre intérêt, que de faire apparaître un accord satisfaisant aux différentes époques d'observation, c'est-à-dire pour diverses amplitudes des pendules.

	1 ^{er} intervalle	2 ^e intervalle	3 ^e intervalle	4 ^e intervalle
Méthode photographique..	0,997682	0,997671	0,997664	0,997658
Méthode des coïncidences.	0,69768	0,99767	0,99767	0,99765

Ainsi donc, ayant adapté la méthode des coïncidences au problème que nous avons posé, elle se montre, au point de vue de la précision des observations, inférieure à la méthode photographique.

On peut répondre qu'en augmentant l'intervalle de temps qui sépare les observations des coïncidences, on augmentera beaucoup la précision.

A ce sujet, on dit habituellement que l'erreur relative dans la méthode des coïncidences est inversement proportionnelle au carré du nombre d'oscillations séparant les coïncidences. Cela n'est pas exact, car on s'aperçoit qu'à mesure que ce nombre d'oscillations N augmente, l'incertitude sur l'instant de la coïncidence augmente également quel que soit le procédé d'observation. On le conçoit aisément puisque les marches des pendules étant alors de plus en plus voisines, ils se mettent d'accord et se séparent de plus en plus lentement. Plus N est grand, plus le nombre d'oscillations pendant lesquels les éclairs se produisent est grand, et plus il est difficile de saisir exactement les instants de leur apparition et de leur disparition. Pratiquement j'ai constaté que l'incertitude n était proportionnelle à N en

sorte que l'erreur relative $\frac{n}{N^2}$ est inversement proportionnelle à N comme dans la méthode photographique.

C'est donc au bout de 2.000 oscillations des pendules que l'observation des coïncidences pouvait donner l'approximation du millionième, c'est-à-dire au bout d'un temps de l'ordre de 1 heure. C'est d'ailleurs toujours un intervalle de temps de cet ordre de grandeur que les différents auteurs ont utilisé dans leurs observations, pour obtenir la précision du millionième.

Pour le problème précis que nous nous sommes proposés, il est certain que cet intervalle de temps est beaucoup trop considérable : les pendules s'amortissent trop et des influences perturbatrices variables ont tout le temps de s'exercer, en sorte qu'on obtient une valeur moyenne du rapport des périodes qui n'a pas un sens bien déterminé, car il peut correspondre à des circonstances très variées dans la marche des pendules.

On peut retenir de là, que pour ces sortes de recherches où il s'agit de suivre les variations de la durée en fonction de l'amplitude, la méthode des coïncidences n'aura généralement pas la souplesse nécessaire.

3. — S'il s'agit d'une détermination en vue d'une mesure de l'intensité de la pesanteur, le problème est différent ; et on peut dire qu'alors, étant données les irrégularités inévitables dans la marche de l'horloge de comparaison, il y a au contraire, intérêt à faire durer la comparaison le plus longtemps possible. Par suite, la méthode des coïncidences — toujours applicable ici puisqu'on peut régler la durée d'oscillation du pendule libre par rapport à l'horloge — donnera *a priori* une précision suffisante. En fait d'ailleurs, on sait qu'elle a toujours donné d'excellents résultats.

Mais en admettant qu'une longue expérience soit nécessaire pour que la marche moyenne de l'horloge soit bonne par suite des compensations qui peuvent se produire, elle ne

comporte pas en elle-même de contrôle pour la valeur de la comparaison. Au contraire, dans le même temps et avec la même précision, la méthode photographique permet d'avoir toute une série de valeurs du rapport des durées, à différentes époques de la marche des pendules: Ainsi, on analyse de plus près cette marche, on a la possibilité de découvrir à quel moment de l'observation il a pu se produire une perturbation dans la marche de l'horloge et on peut reconnaître très aisément s'il n'y a pas une cause d'écart systématique dans les marches relatives en fonction de l'amplitude.

4. — *Quelques observations sur la méthode des coïncidences.* — a) Les considérations qui suivent, suggérées par l'expérience, montrent que l'application de la méthode des coïncidences, qui semble très simple, demande cependant des précautions particulières.

On compare souvent cette méthode à la mesure des longueurs par le vernier (la méthode photographique correspondrait de même à leur mesure micrométrique directe).

Dans la mesure au vernier (au $\frac{1}{10}$ par exemple) si l'intervalle fractionnaire à mesurer n'est pas un nombre exact de dixièmes d'une division de la règle, on ne devrait pas observer de coïncidence entre une division de la règle et une division du vernier. Cependant on en observe une, mais à cause de l'imperfection de l'instrument, de l'irrégularité ou de l'épaisseur des traits du vernier.

Il en est de même de la méthode des coïncidences.

Pendant que le mobile représentant le mouvement du premier pendule (de période T) parcourt une circonférence entière, le deuxième parcourt un arc égal à $2\pi + \omega'T$; en supposant qu'il aille moins vite et ait la vitesse angulaire :

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'}.$$

A supposer donc, que les deux mobiles soient passés par

leur position d'équilibre au même moment, il n'y aura coïncidence à nouveau que si la quantité :

$$\frac{2\pi}{2\pi - \omega'T} = \frac{T'}{T' - T}$$

est un nombre entier.

En conséquence, au bout du premier tour d'avance du premier mobile il n'y aura pas forcément coïncidence. Elle se produira au bout du $n^{\text{ième}}$ tour si l'on peut trouver un nombre entier n tel que :

$$\frac{nT'}{T' - T}$$

soit aussi un nombre entier.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion théorique qui tend à montrer qu'en général il ne devrait pas y avoir de coïncidences et que c'est par hasard qu'il s'en produit. L'étude a été faite par Bichat ⁽¹⁾; elle n'a aucun intérêt, car l'expérience prouve qu'il est possible d'observer des coïncidences et que même, elles ont lieu pour plusieurs battements successifs des pendules.

Cela tient évidemment à l'imperfection des moyens d'observation, et c'est en tenant compte de cette imperfection qu'il faut discuter la méthode, pour en tirer quelque conclusion sérieuse. Comme on ne se place généralement pas à ce point de vue, je ferai une étude rapide de la question.

b) Quels que soient les procédés mis en œuvre par les différents auteurs pour l'observation des coïncidences, tout se ramène à supposer qu'en gardant la représentation géométrique classique, le mobile M ponctuel, est remplacé par un petit élément linéaire ab (fig. 11). Dans la réalisation particulière que nous avons faite de la méthode, cet élément correspond au diamètre des trous et des images, O et O' (en supposant que tous ces diamètres ont la même valeur).

(1) BICHAT. *Journal de physique*, 1^{re} série, t. III, p. 369.

Supposons pour simplifier, que les deux pendules aient même amplitude linéaire u_0 et soit a la largeur de l'élément ab .

Considérons les deux éléments représentatifs ($ab, a'b'$) se déplaçant sur la même circonférence. Soit α leur écart angulaire, à l'instant initial (choisi par exemple tel, que ab passe devant la position d'équilibre). A chaque oscillation cet écart diminue de la quantité $\frac{2\pi\Delta T}{T}$, ΔT étant la différence des durées d'oscillation. Il y aura coïncidence au bout de N oscillations si un nombre entier N satisfait à la condition :



Fig. 11.

$$\alpha - \frac{a}{u_0} < 2\pi N \cdot \frac{\Delta T}{T} < \alpha + \frac{a}{u_0}$$

condition d'autant plus facile à réaliser que a est plus grand.

Pour écrire cette condition nous supposons qu'il y a coïncidence alors même que b' coïncide avec a ou que a' coïncide avec b , car ce sont les conditions limites, dans lesquelles l'œil reçoit de la lumière.

La coïncidence apparente pourra se produire pour plusieurs passages successifs; le nombre de ces passages sera :

$$n = \frac{\frac{2a}{u_0}}{2\pi \frac{\Delta T}{T}} = \frac{aT}{\pi u_0 \Delta T}$$

(pour les passages en A) et on prendra l'heure moyenne de ces coïncidences apparentes. Mais si l'on n'est pas maître de régler à volonté la durée d'oscillation d'un des pendules, il pourra se faire qu'une première coïncidence ne se produise pas nécessairement. Si en effet, l'angle dont avance par tour l'un des éléments par rapport à l'autre est plus grand

que l'angle sous lequel on voit un de ces éléments du centre O, il pourra arriver qu'il n'y ait pas superposition au passage par la position d'équilibre, ou bien encore que la première coïncidence s'étant produite, la suivante n'ait pas lieu. On est amené ainsi à donner aux fentes ou aux trous une largeur suffisante, pour qu'elle ait lieu à coup sûr. La condition est la suivante :

$$a > \pi u_0 \frac{\Delta T}{T}$$

on voit que cela revient à faire $n > 1$ ce qui est évident.

Par exemple : nous nous proposons de comparer une horloge sidérale et une horloge de temps moyen. Alors $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{364}$. Admettons $u_0 = 2$ cm. on trouve $a > 0$ mm. 17.

Les fentes devront avoir une largeur supérieure à $\frac{2}{10}$ mm.

c) *Influence de l'amortissement.* — Supposons que l'un des pendules s'amortisse librement. Aux grandes amplitudes, nous pourrions donner aux fentes un diamètre tel que peu d'éclairs se produisent, mais à mesure que l'arc d'oscillation diminue, le nombre des coïncidences apparentes augmente et la précision diminue.

Mais d'autre part, à ce moment, une autre cause d'erreur intervient, qui rappelle l'une de celles que nous avons discutées au sujet de la méthode photographique. Si pendant la durée des éclairs donnant la coïncidence apparente, le pendule a eu une décroissance sensible de son oscillation, il n'est plus exact de prendre comme instant de la coïncidence vraie la moyenne des heures d'apparition et de disparition des éclairs.

Soit u_0 l'amplitude initiale (au moment de l'apparition du premier éclair) et soit $u_0 - \Delta u$ l'amplitude finale (au moment du dernier éclair). Nous pouvons admettre que la décroissance des arcs a été assez faible pour qu'on puisse la consi-

dérer dans l'intervalle, comme fonction linéaire du temps.

Supposons donc qu'on ait observé n éclairs en tout (en ne comptant que les éclairs qui correspondent aux passages des pendules dans le même sens) et que m soit le nombre de coïncidences apparentes qui se sont effectivement produites entre le premier éclair et la coïncidence exacte.

D'après notre hypothèse, l'amplitude moyenne des m premières oscillations est : $u_0 - \frac{\Delta u}{4}$
et l'amplitude moyenne pour l'ensemble des n oscillations est :

$$u_0 - \frac{\Delta u}{2}.$$

On en déduit :

$$n = \frac{aT}{\left(u_0 - \frac{\Delta u}{2}\right) \pi \Delta T} \quad m = \frac{\frac{a}{2} T}{\left(u_0 - \frac{\Delta u}{4}\right) \pi \Delta T},$$

d'où sensiblement :

$$m = \frac{n}{2} - \frac{n \Delta u}{8 u_0}.$$

Ainsi donc, l'instant de la coïncidence vraie se trouve plus rapproché du premier éclair que du dernier et la correction à apporter à l'heure de la moyenne des n éclairs est :

$$\frac{n \Delta u}{8 u_0} \cdot T, \quad \text{ou encore : } \frac{a T \Delta u}{8 \pi u_0^2 \Delta T}.$$

Pour de petites amplitudes j'ai eu à faire cette correction. Defforges ⁽¹⁾ la signale, l'obtient par des calculs assez longs et montre que dans ses propres expériences, elle n'est pas toujours négligeable.

5. — Résumons maintenant ce que peut donner la méthode des coïncidences dans divers cas.

1° On a la liberté de régler au moins un des pendules et ceux-ci n'ont qu'un faible amortissement de telle sorte que

(1) *Séances de la Société française de Physique*, 1888, p. 141.

l'expérience peut durer longtemps : alors la méthode donne une excellente précision, à condition de tenir compte de l'erreur dont nous venons de parler aux petites amplitudes. Mais encore n'aboutit-elle qu'à fournir une valeur moyenne du rapport des durées d'oscillation dans des limites assez étendues de l'amplitude ;

2° On ne peut régler les pendules. Le nombre des oscillations entre deux coïncidences est alors imposé : $N = \frac{T}{\Delta T}$.

Si ΔT n'est pas très petit la méthode sera applicable dans de bonnes conditions (par exemple comparaison d'une horloge sidérale et d'une horloge de temps moyen). Si ΔT est très petit, l'expérience, exigeant un temps très considérable pourra n'être pas possible. En tous les cas la précision obtenue dépendra essentiellement de ΔT , c'est-à-dire de la marche relative des pendules ;

3° On peut régler l'un des pendules, mais son amortissement est considérable (Ce cas s'est présenté dans un certain nombre de mes expériences où je faisais osciller un pendule de très faible masse suspendu à une lame élastique ou à un cylindre roulant avec frottement). Dans ces conditions, l'expérience ne peut pas durer longtemps ; on est donc amené à régler les pendules de façon que leurs durées d'oscillation soit nettement différentes. Alors les coïncidences sont d'une observation difficile et, d'autre part, la précision peut n'être pas suffisante.

Avant de conclure, dans la discussion des avantages et inconvénients respectifs de la méthode photographique et de la méthode des coïncidences, je dois parler d'expériences particulières faites à l'Observatoire de Paris, où les deux méthodes ont été également employées simultanément, et où, par suite, il a été possible de les comparer.

V. — Réalisation de la méthode photographique
à l'Observatoire de Paris. Expériences sur les pendules.

1. — Il s'agit ici, du problème de la comparaison des phases simultanées de deux horloges astronomiques. La méthode employée chaque jour à l'Observatoire est celle des coïncidences téléphoniques : chaque pendule possède un dispositif particulier permettant, à chaque oscillation du balancier, l'envoi d'un courant de courte durée dans un circuit primaire. L'emploi de deux secondaires en série et d'un récepteur téléphonique permet d'écouter en même temps les « tops » des deux pendules.

L'approximation obtenue peut atteindre le $\frac{1}{100}$ de seconde ; une précision plus grande n'est d'ailleurs pas nécessaire.

Il était donc inutile d'adopter à l'Observatoire la même réalisation qu'au laboratoire. Au contraire, profitant de ce que la précision pouvait être beaucoup moindre, on devait chercher à simplifier la technique de façon à permettre une mise en œuvre rapide, très simple et à la portée de tout opérateur même inexpérimenté.

J'ai été amené ainsi, à étudier un dispositif ne nécessitant pas l'emploi de l'étincelle électrique. La source continue subsiste seule et la phase instantanée s'obtient en démasquant brusquement l'objectif, avec un obturateur à électro-aimant, très rapide.

L'objectif reste découvert pendant un peu moins de deux secondes, puis l'obturateur revient le masquer, mais *lentement* de telle sorte qu'il n'y ait qu'une seule impression correspondant au premier mouvement de l'obturateur.

Sur le cliché on observe (figure 12 et figure 13, pl. I), une bande grise limitée aux bords plus sombres *a* et *b* ; d'autre part, on voit une partie *ac* plus noire que le reste. Le bord *c* qui la limite de façon nette, correspond au moment où l'obturateur a découvert l'objectif.

Il y a une difficulté : les bords *a* et *b* correspondent à une vitesse nulle du pendule, le bord intermédiaire *c* a une vitesse qui peut être assez grande. Les impressions *a*, *b* et *c* seront donc de force inégale et cela nuira à la précision des mesures.



Fig. 12.

On doit donc s'arranger pour que la source qui éclaire l'index du pendule, jette une lueur plus vive au moment où l'obturateur se lève, et pour que, d'autre part, son éclat baisse aussitôt après ce moment.

La disposition employée à cet effet est indiquée par la figure 14 : on établit le contact i_1 la lampe *L* qui sert à éclairer l'index, brille, et en même temps un électro-aimant

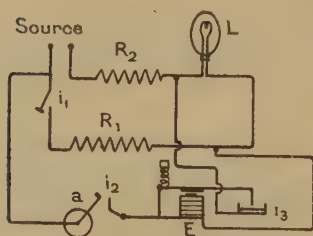


Fig. 14.

(non figuré), déclanche un mouvement d'horlogerie qui entraîne le bras tournant *a*. Quand le contact i_2 très court, a lieu, la résistance R_1 se trouve shuntée par l'électro *E* peu résistant et la lampe jette une vive lueur. C'est à ce moment aussi, qu'a lieu le mouve-

ment très brusque de l'obturateur, commandé par l'électro *E*, démasquant l'objectif.

Mais aussitôt après ce mouvement le contact i_3 a lieu, la lampe est mise en court-circuit par l'électro et elle ne garde qu'une intensité relativement faible, mais suffisante pour produire une photographie de l'index aux extrémités de la course du pendule. Le circuit électrique pour l'observation simultanée de deux ou plusieurs pendules se réalise, de même, très simplement.

2. — *Sens du pendule.* — On sait qu'il faut connaître le sens du mouvement du pendule au moment où se fait l'image intermédiaire ; or on l'obtient immédiatement par l'observation du cliché : l'image de l'index se déplaçait évidemment du bord intermédiaire au bord extrême qui limite la région la plus sombre.

Il est donc tout à fait inutile d'observer le sens des pendules ; on voit qu'ici le problème est résolu plus simplement qu'avec l'étincelle.

3. — *Mesure du cliché et calcul.* — Le procédé a déjà été décrit : on projette sur la plaque l'image d'une règle divisée. On peut repérer ainsi les bords à $\frac{1}{10}$ mm. près. Il faut remarquer, d'autre part, que dans le cas des pendules astronomiques, l'amplitude reste très voisine d'une valeur moyenne bien déterminée ; j'ai constaté que quel que soit le trouble provoqué dans l'amplitude, la force d'entretien du balancier agit toujours de façon à ramener l'amplitude initiale.

On peut donc se servir pour calculer la phase, d'un tableau donnant $\arcsin \frac{a-b}{a+b}$ en fonction de $a-b$, l'amplitude $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ayant une valeur fixe.

Comme je l'ai déjà dit, on supprime tout calcul ou l'emploi d'un tableau, en utilisant une règle, dont l'image totale se projette exactement en coïncidence avec la course du pendule et qui est graduée de telle sorte qu'elle donne la phase en centièmes de seconde par une simple lecture.

4. — Il résulte de là que l'observation photographique de la phase d'un pendule est une opération extrêmement simple et qui n'exige aucune habileté ou expérience particulière de la part de l'opérateur. Le réglage primitif étant fait, en vue d'une opération quotidienne, celle-ci consiste en effet à déclancher le mouvement d'horlogerie, à développer la plaque et à lire la phase. S'il y a lieu de faire une deuxième

photographie, il suffit de provoquer à nouveau les contacts; le châssis s'étant de lui-même déplacé comme nous l'avons précédemment expliqué, l'impression a lieu dans une région nouvelle de la plaque. Je me suis assuré qu'il était possible, par l'addition de deux miroirs et d'un petit objectif à l'appareil, de photographier (avec la même source) le cadran de l'horloge de façon à avoir simultanément l'heure, la minute, la seconde, et le centième de seconde sur le cliché.

Comme cause d'erreur possible, on peut concevoir que la simultanéité dans l'action des électros qui commandent respectivement chacun des objectifs n'est pas parfaitement réalisée. Il s'agit de deux électro-aimants de faible résistance, identiques, placés en série, travaillant dans les mêmes conditions, et très brusquement. Leur simultanéité d'action est donc probable; je m'en suis cependant assuré, en comparant les phases obtenues par le déclenchement des obturateurs, et par deux étincelles en série, éclatant respectivement devant chaque pendule.

La précision n'est limitée que par la netteté du bord intermédiaire. A condition d'avoir des obturateurs très rapides, on obtient des bords intermédiaires suffisamment nets pour pouvoir les pointer à $\frac{1}{10}$ de mm. près. Cela correspond à une approximation du $\frac{1}{1.000}$ de seconde, précision très suffisante.

5. — *Comparaison des pendules « Joseph » et « Winerl » (Emploi simultané des deux méthodes).* — L'expérience a pour objet d'employer simultanément l'observation des coïncidences téléphoniques actuellement en usage et la méthode photographique, pour la comparaison à un moment déterminé des phases ou « états » de deux pendules. La première méthode ne permettant pas de comparer deux horloges de même marche, on s'adresse à deux horloges réglées l'une sur le temps sidéral, l'autre sur le temps moyen. On opère de la façon suivante : on écoute les « tops », des

deux pendules, une coïncidence se produit; on note à ce moment l'heure, la minute et la seconde que marquent les deux pendules. Puis, un nombre de secondes bien déterminé après, on photographie les positions instantanées des balanciers à un moment quelconque de leur oscillation, et en même temps, leur amplitude.

L'expérience a été faite ainsi, dans la salle des pendules de l'Observatoire de Paris, avec la pendule « Joseph » de temps moyen et la pendule « Winnerl » de temps sidéral ⁽¹⁾.

Je donnerai les résultats obtenus sous la forme du tableau suivant :

Les lignes correspondent respectivement aux onze coïncidences successives qui ont été observées.

Les colonnes donnent : 1^o les heures des coïncidences téléphoniques lues d'une part à la pendule Joseph, d'autre part à la pendule Winnerl ; 2^o les phases simultanées à un moment quelconque du cours de l'oscillation qui a lieu 22 seconde après l'époque de la coïncidence pour chacune des deux pendules. Elles sont données en centièmes de seconde (méthode photographique).

La phase est comptée positivement quand le balancier a dépassé sa position d'équilibre et négativement quand il ne l'a pas encore atteinte.

6. — Voyons quels sont les renseignements que l'on peut tirer du tableau suivant.

D'abord, par l'une ou l'autre méthode, on résoud le problème ordinaire de la comparaison des pendules. A une heure déterminée, quelle est l'avance ou le retard d'une des pendules sur l'autre ?

(1) J'ai pu faire la comparaison des pendules, grâce à l'aide que j'ai reçue de M. Boinot, astronome adjoint, qui a bien voulu déterminer une série de coïncidences téléphoniques, pendant que je photographiais les pendules.

La figure 15 (pl. I) donne une reproduction des appareils, disposés devant la pendule Joseph.

Tableau des résultats

No de la coïnci- dence	Heure de la coïncidence		Phase à un moment arbitraire dans le cours de l'oscillation qui a lieu 22 s. après la coïncidence	
	P. Joseph	P. Winnerl	P. Joseph	P. Winnerl
	h. m. s			
1	5,01,53	22,42,58	— 14,84	+ 1,53
2	5, 7, 50	22,49, 5	+ 7,03	+ 24,04
3	5,14, 3	22,55,10	+ 8,57	+ 25,47
4	5,20, 3	23, 1,11	+ 5,69	+ 21,84
5	5,26, 7	23, 7,16	— 2,25	+ 14,18
6	5,32, 9	23,13,19	— 7,07	+ 8,92
7	5,38,17	23,19,28	+ 14,92	+ 32,08
8	5,44,17	23,25,29	— 6,22	+ 9,61
9	5,50,25	23,31,38	— 10,48	+ 6,02
10	5,56,23	23,37,37	+ 11,29	+ 26, 5
11	6, 2,29	23,43,44	— 4,17	+ 11,73

Prenons la coïncidence 1. Nous pouvons répondre : A l'heure 5,01,53 (temps moyen) les deux pendules sont en coïncidence (méthode des coïncidences). Ou bien : A l'heure 5,01,53 + 22 secondes les deux pendules présentent un écart de $14,84 + 1,53 = 16,37$ centièmes de seconde (méthode photographique). En convertissant le temps moyen en temps sidéral on voit alors quelle est l'avance ou le retard de la pendule Joseph sur la pendule Winnerl.

Mais une question se pose. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont-ils comparables ?

L'observation des tops téléphoniques donnant la coïncidence à 5 h. 01 m. 53 s. conduirait pour l'heure de 5,01,53 + 22 sec. à un écart de phase de $22 \times \frac{1}{364}$ centièmes de seconde, puisque la pendule Winnerl gagne une oscillation simple en 364 secondes sur la pendule Joseph. On trouve ainsi environ 0,06 seconde, au lieu de 0,16 que donne l'observation photographique des balanciers.

En d'autres termes encore, on peut dire : la coïncidence observée à l'aide des « tops » a lieu à 5 h. 1 m. 53 sec. Si on l'avait déduite de l'instant des passages simultanés des balanciers par leur position d'équilibre, on aurait trouvé qu'elle avait eu lieu à 5 h. 1 m. 17 sec.

Cette différence s'explique en considérant que les tops sont, en général, produits par le contact des dents de la roue des secondes avec un ressort fixe. Deux horloges, de construction différente, donneront en général des contacts correspondant à des positions différentes des balanciers.

La méthode téléphonique fixe l'origine de la seconde pour les comparaisons, à l'instant du contact, tandis que la méthode photographique la fixe à la position d'équilibre du balancier.

7. — La comparaison des résultats ne peut donc se faire qu'en considérant les coïncidences successives et cherchant, par exemple le nombre de secondes de temps moyen qui s'écoulent entre deux coïncidences. Ce nombre s'obtient directement par la méthode téléphonique, et il demande un calcul simple, que nous connaissons déjà, à partir de l'observation photographique. Dans le tableau suivant, nous donnons les nombres déduits des deux méthodes et les amplitudes moyennes respectives des deux pendules.

La moyenne est : 364,2 pour la méthode téléphonique, et 364,6 pour la méthode photographique ; l'écart maximum est 5,2 pour la première et 1,4 pour la deuxième.

On doit d'ailleurs remarquer que le nombre 366,0 qui s'écarte le plus des nombres obtenus par la méthode photographique, correspond très probablement à une anomalie dans la marche de la pendule Joseph. On voit, en effet, qu'entre les coïncidences 7 et 8 l'amplitude de cette pendule subit une variation anormale. Signalons en passant, à ce sujet, l'intérêt que présente l'enregistrement de l'amplitude de l'oscillation que comporte l'observation photographique.

On voit immédiatement que la pendule Joseph a une amplitude beaucoup plus variable que la pendule Winnerl ; sa marche doit être aussi moins régulière.

N ^o de la coïnci- dence	Méthode téléphonique	Méthode photogra- phique	Amplitude (en dixièmes de millimètres)	
			P. Joseph	P. Winnerl
1	366	364,8	201,3	181,1
2	364	365,4	201,3	181,3
3	360	363,7	202,2	181,3
4	364	364,2	203,6	181,2
5	362	364,2	203,4	181,4
6	368	364,1	202,1	181,4
7	360	366,0	200,7	181,3
8	368	366,0	200,7	181,3
9	358	364,0	200,7	181,3
10	366	364,3	201,3	181,3
11				

8. — *Les tops téléphoniques ne se produisent pas régulièrement.* — Nous avons dit plus haut que les « tops » téléphoniques n'ont pas lieu au moment du passage du balancier par sa position d'équilibre. Par exemple l'écart de phase en centièmes de seconde des deux balanciers au moment des tops correspondant à la coïncidence n^o 1, est de 10,3 centièmes de seconde. Cet écart n'a aucune importance dans la comparaison des pendules, à condition qu'il reste constant d'un top au suivant.

Le premier tableau que nous avons donné permet de déter-

miner l'écart pour les différents tops qui correspondent aux diverses coïncidences. On obtient ainsi :

N° de la coïncidence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ecart en centièmes de seconde.	10,3	11,0	10,9	10,1	10,4	10,0	11,1	9,8	10,5	9,2	9,9

On voit que l'instant du top n'est pas défini d'une façon constante par rapport à l'instant du passage du balancier par sa position d'équilibre. La différence entre les écarts de phase, qui devrait être nulle, peut atteindre $\frac{2}{100}$ de seconde.

Comme c'est le balancier qui règle le mouvement et que son oscillation est constante très sensiblement, on doit conclure de là, ou qu'il y a des erreurs expérimentales dans l'observation des coïncidences, ou que les contacts des pendules ne sont pas réguliers.

Les coïncidences téléphoniques ayant été déterminées par un observateur très expérimenté, nous pouvons dire que l'erreur principale provient surtout des irrégularités dans la succession des « tops », par suite de légers défauts de construction dans la roue dentée qui produit les contacts.

Pour que la méthode donne toute sa précision, il faut d'ailleurs que les « tops » soient brefs, secs et de même intensité et ces conditions ne sont pas toujours réalisées.

9. — *Les avantages particuliers que présenterait la méthode photographique dans les Observatoires.*

1° Alors qu'actuellement l'observation des coïncidences ne permet de comparer entre elles qu'une horloge de temps moyen et une horloge de temps sidéral, et par suite, qu'elle oblige de convertir par un calcul spécial, l'un des temps à l'autre, la méthode photographique permet la comparaison directe de deux horloges de même marche,

2^o Elle est applicable, à un instant quelconque, et simultanément, non seulement à deux horloges, mais à toutes celles qu'on se propose de comparer.

3^o La mise en œuvre, une fois l'installation effectuée, est très simple et rapide, même pour un opérateur quelconque.

Dans la méthode téléphonique, au contraire, il faut, en même temps : écouter les battements à l'approche d'une coïncidence, « garder la seconde » de l'une des horloges, et lire sur l'autre la seconde qui correspond à la coïncidence. Cela exige une attention constante et une grande habitude. L'intérêt est évident, d'une méthode qui, au contraire, supprime tout effort de la part de l'observateur, et par suite, toute cause d'erreur personnelle.

4^o Un autre avantage très grand, est que la comparaison photographique des pendules n'exige aucun lien matériel entre l'horloge et une partie quelconque de l'installation.

Au contraire, dans la méthode téléphonique, le contact électrique nécessaire à la production du top, peut perturber le mouvement du régulateur ; si d'autre part on le produit indépendamment de ce dernier, la méthode ne donne plus de certitude.

5^o Enfin les clichés photographiques obtenus (donnant l'heure, la minute, la seconde et le centième de seconde, simultanés de différentes horloges) constituent des documents que l'on peut conserver.

VI. — Conclusions. — Avantages généraux de la méthode photographique.

Comme conclusion des expériences de comparaison, résumons les raisons *générales* pour lesquelles la méthode photographique nous paraît supérieure à l'observation des coïncidences.

C'est tout d'abord, pour une durée déterminée de l'ex-

périence, l'obtention d'une précision plus grande dans l'observation des phases ou des durées d'oscillations.

Pour une précision donnée, la méthode possède une rapidité relativement très grande.

Elle est générale et s'applique quelles que soient les durées d'oscillations respectives des deux pendules.

Elle permet de comparer des pendules dans des situations relatives quelconques, dans deux salles différentes par exemple.

Elle s'applique sans modification sensible de la structure des pendules ; ceux-ci ne sont pas chargés de masses accessoires importantes.

On peut rendre son application entièrement automatique. Elle est alors soustraite à toute cause d'erreur personnelle.

Le rapport des durées d'oscillation peut s'obtenir comme la moyenne d'un grand nombre de mesures ; la méthode porte ainsi en elle-même une possibilité de contrôle.

Elle comporte un enregistrement photographique de l'arc d'oscillation, très utile pour l'étude de la régularité de marche du pendule, et pour la réduction à l'amplitude infiniment petite.

Ce sont là de très grands avantages.

Que peut-on objecter à la méthode photographique ? A première vue, on pourrait dire qu'elle nécessite une installation compliquée et qu'elle est d'une application délicate.

Mais on peut répondre que l'installation d'une bobine, d'un condensateur, d'un éclateur, et, devant chaque pendule d'un appareil photographique ne présente réellement pas de difficultés spéciales.

Le réglage initial est peut-être délicat, si on recherche une extrême précision. mais toute méthode précise, et celle des coïncidences en particulier, exige des soins spéciaux. L'installation une fois faite, on dispose d'une méthode dont l'application est rapide et simple, ce qui est fondamental pour des déterminations fréquentes.

Les calculs sont plus longs qu'avec la méthode des coïncidences, mais d'une part, nous avons vu que dans les applications courantes de la méthode, il est possible de les simplifier beaucoup et même de les supprimer entièrement, et d'autre part, même là où ils sont nécessaires, ils sont peu de chose à côté de ceux qui interviennent dans les recherches précises sur le pendule.

En définitive, la seule critique qu'on puisse apporter et qui concerne la difficulté de réalisation n'a pas grande valeur, et elle disparaît entièrement si l'on réfléchit aux avantages que nous avons signalés comme conclusion des expériences de comparaison entreprises avec les deux modes d'observation du pendule.

Cela est d'autant plus vrai, que j'en n'ai pas présenté un modèle définitif de réalisation de la méthode photographique. Des modifications nouvelles peuvent en simplifier l'application. J'ai voulu montrer qu'elle peut non seulement soutenir la comparaison avec la méthode des coïncidences, mais même apparaître nettement supérieure à cette méthode, encore exclusivement employée aujourd'hui.

CHAPITRE II

ÉTUDE DE L'OSCILLATION DU PENDULE SUSPENDU PAR UN COUTEAU OU UN CYLINDRE

I. — Introduction

Disposant d'une méthode qui présente des qualités aussi nouvelles que celles que nous avons analysées dans le chapitre précédent, il est naturel de l'appliquer pour une étude où elle semble devoir les manifester avec le plus de profit.

J'ai été ainsi amené à faire une étude systématique, par la méthode photographique, de la durée d'oscillation du pendule en fonction de l'amplitude. Ce point de vue n'avait pas fait jusqu'ici, l'objet d'expériences précises et complètes, probablement parce qu'on ne disposait pas d'un procédé d'observation ayant la souplesse nécessaire. Cependant l'étude expérimentale de la façon dont le pendule s'écarte de la loi d'isochronisme est essentielle, non seulement quand on se propose d'utiliser le pendule comme régulateur des horloges, mais aussi quand on s'en sert pour des déterminations de l'intensité de la pesanteur, elle seule, permettant de faire une réduction exacte à l'amplitude infiniment petite.

Voici le principe de ces recherches : Le pendule à étudier, oscille librement, et, à différents états de son mouvement, sa durée d'oscillation est comparée à celle d'un pendule libre, qui oscille toujours dans des limites déterminées d'amplitude et sert d'étalon de temps.

Si T_0 est la durée des oscillations infiniment petites et T la durée sous l'amplitude θ_0 , on a :

$$T = T_0 + \varphi(\theta_0).$$

Nous nous proposons de déterminer $\varphi(\theta_0)$.

Dès le début des expériences, il m'est apparu des anomalies par rapport aux faits ordinairement admis. Pour les interpréter, il m'a fallu étendre le but de cette étude à l'oscillation de pendules à couteau sur des plans de diverse nature et aussi à l'oscillation, dans des conditions variées, de pendules suspendus à des cylindres métalliques.

C'est l'exposé des résultats obtenus sur ce sujet qui fait l'objet de ce nouveau chapitre.

Mais nous allons tout d'abord faire quelques remarques sur la valeur des résultats de la comparaison de deux pendules libres.

2. — *L'oscillation d'un pendule libre est-elle rigoureusement harmonique ?* — Dans l'application de la méthode photographique, on fait l'hypothèse que l'oscillation du pendule est harmonique. La vérification de cette hypothèse résulte de la concordance remarquable des divers résultats obtenus pour le rapport des durées d'oscillation des deux pendules (en utilisant plusieurs étincelles dans le cours de l'oscillation).

Faisons l'expérience simple suivante : Réglons deux pendules de façon qu'ils aient même durée d'oscillation, faisons éclater deux étincelles successives, mesurons sur chacun des clichés la distance des deux images et réduisons la en temps (en centièmes de seconde par exemple). Nous devons trouver le même nombre pour les deux pendules, si notre hypothèse est exacte, quelles que soient les phases des pendules au moment des étincelles.

Or cela a lieu toujours, même dans des cas particuliers où l'on pourrait s'attendre à trouver une petite différence. Je donnerai l'exemple suivant (bien qu'il ne se rapporte pas à

deux pendules à couteau). L'un des pendules pèse 500 gr. et est suspendu à une lame flexible de 0 mm. 46 d'épaisseur ; il s'amortit très vite. L'autre est un pendule à couteau, peu amorti. Une première étincelle saisit les pendules avant leur passage par la position d'équilibre et on trouve pour les phases simultanées :

$$1^{\text{er}} \text{ pendule : } \alpha = - 20^{\circ}80 \qquad 2^{\text{e}} \text{ pendule : } \beta = - 14^{\circ}15.$$

Une seconde étincelle les saisit après le passage par la position d'équilibre et on obtient :

$$1^{\text{er}} \text{ pendule : } \alpha' = + 3^{\circ}89 \qquad 2^{\text{e}} \text{ pendule } \beta' = + 10^{\circ}55.$$

On a, à $\frac{1}{100}$ grade près :

$$\alpha' - \alpha = \beta' - \beta.$$

On doit conclure de là que dans tous les cas où l'on utilise ordinairement le pendule, son mouvement satisfait remarquablement à la loi harmonique :

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t.$$

La vérification se fait, quelle que soit la position des images à l'approximation du $\frac{1}{10,000}$ et la méthode photographique apparaît ainsi comme la méthode d'euregistrement du mouvement pendulaire la plus précise qui ait sans doute été employée jusqu'ici.

En d'autres termes, si nous nous reportons à la relation très simple qui existe entre le mouvement pendulaire et le mouvement uniforme, nous pouvons dire que les oscillations de deux pendules libres correspondent à deux mouvements circulaires uniformes dans lesquels, il est impossible, par des photographies simultanées, de déceler la moindre irrégularité.

Le pendule libre peut donc servir, dans le cours *d'une de ses oscillations*, d'étalon de temps, au même titre qu'un mouvement uniforme parfaitement réalisé.

Mais il s'amortit. Si donc on veut profiter du remarquable caractère harmonique de son mouvement, pour l'utiliser à définir des intervalles de temps dépassant quelques oscillations il est indispensable de connaître avec beaucoup de précision la loi :

$$T = T_0 + \varphi(\theta_0).$$

De là l'intérêt principal de ces recherches.

3. — *Le pendule de comparaison peut être un pendule libre oscillant dans des limites déterminées d'amplitude.*—

Si on lance deux pendules libres à couteau et qu'on les compare, on obtient un rapport de leurs durées d'oscillation qui dépend évidemment de l'amplitude initiale et de l'amplitude finale. Mais je me suis assuré que si on relance les pendules et qu'on les compare à nouveau, dans les mêmes limites d'amplitude on obtient le même nombre pour le rapport de leurs durées à condition de les lancer avec précaution, et *sans déplacer le couteau sur son support.*

Dans ces conditions, étant donné que nous ne nous proposons pas des déterminations de durée absolues, nous pouvons prendre comme instrument de comparaison un pendule libre oscillant dans des limites bien déterminées d'amplitude. Cela revient à prendre comme unité de temps, la durée d'oscillation moyenne d'un tel pendule, dans les limites d'amplitude où on l'utilise.

4. — *La correction ordinaire d'amplitude* (Erreur circulaire). — On sait que les oscillations du pendule théorique à couteau, ne sont pas rigoureusement isochrones et que la durée de la période est donnée, en fonction de l'amplitude par la formule suivante :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Pour déterminer si une cause quelconque produit une variation à l'isochronisme, il sera toujours nécessaire de

tenir compte de l'erreur circulaire $\frac{\theta_0^2}{16}$ et de réduire la durée d'oscillation T à l'amplitude infiniment petite.

Si l'amortissement du pendule est faible et si l'expérience dure peu de temps, θ_0 sera la moyenne de l'amplitude initiale et de l'amplitude finale.

Dans quelques cas, quand l'amortissement est assez grand, il y a lieu de faire un calcul plus précis. Reportons-nous au principe de la méthode, exposé par la représentation géométrique du mouvement. Gardons les mêmes notations, et supposons que le premier pendule, de période T oscille librement et s'amortisse, de l'amplitude initiale θ_0 à l'amplitude finale θ_1 entre les instants t_0 et t_1 d'observation.

Comme l'amplitude varie, T est fonction du temps et le mobile représentatif doit être considéré comme animé d'une vitesse variable. Le pendule de comparaison, oscillant dans des limites déterminées d'amplitude aura une durée d'oscillation moyenne T' . On a par suite :

$$2\pi n + \alpha_1 - \alpha = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{T}$$

$$2\pi n' + \alpha'_1 - \alpha' = \frac{2\pi}{T'} (t_1 - t_0).$$

Admettons que T varie d'une façon *continue* avec θ . On a :

$$T = T_0 + \frac{\theta^2}{16} T_0$$

(en appelant ici θ , l'amplitude au temps t)

θ varie de façon exponentielle, mais dans tous les cas, il suffit de supposer une variation linéaire entre θ_0 et θ_1 (qui ne sont jamais très différents). Par suite :

$$d\theta = \frac{\theta_0 - \theta_1}{t_0 - t_1} dt.$$

D'où sensiblement :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{T} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{\theta^2}{16} \right) dt = \frac{1}{T_0} (t_1 - t_0) \left[1 - \frac{1}{48} \frac{\theta_1^3 - \theta_0^3}{\theta_1 - \theta_0} \right]$$

Et on arrive facilement à la formule suivante :

$$\frac{T_0}{T'} = \frac{2\pi n' + \alpha'_1 - \alpha'}{2\pi n + \alpha_1 - \alpha} \left[1 - \frac{1}{64} (\theta_0 + \theta_1)^2 - \frac{1}{192} (\theta_0 - \theta_1)^2 \right]$$

Telle est la formule que nous appliquerons dans les cas où une grande approximation sera nécessaire. Le plus souvent nous n'aurons à calculer que le terme :

$$\frac{1}{64} (\theta_0 + \theta_1)^2.$$

5. — J'ai dit, dans l'introduction de ce chapitre, que, dès mes premières recherches, sur la comparaison de deux pendules à couteau, j'avais constaté des anomalies, c'est-à-dire des écarts à la loi ordinaire de réduction à l'amplitude infiniment petite.

Avant d'exposer ces premières recherches et celles qui ont eu pour but d'éclaircir les causes de ces anomalies, je ferai un historique rapide de la question du couteau du pendule.

Il apparaîtra que cette question n'est pas simple et qu'elle était restée très obscure.

II. — Historique des recherches antérieures sur le couteau du pendule

1. — *L'arête n'est pas une ligne géométrique. C'est une surface cylindrique qui roule sur le plan de suspension.* —

Laplace ⁽¹⁾ en étudiant le pendule de Borda ⁽¹⁾ signale une incertitude dans la détermination de la longueur du pendule à seconde, provenant de ce que le couteau n'est pas terminé par une arête vive mais par une surface cylindrique de très petit rayon. En réalité, par conséquent, le couteau roule sur le plan de suspension ; le pendule tourne à chaque instant autour du point de contact de l'arête et du plan, et ce point varie sans cesse.

⁽¹⁾ LAPLACE. *Ann. de Chimie et de Physique*, t. III (1816).

Euler ⁽¹⁾ avait déjà étudié le mouvement d'un pendule roulant par un cylindre sur un plan horizontal. Le résultat du calcul est le suivant. Soit r le rayon du cylindre et h la distance du centre de gravité au plan ; le pendule conserve des oscillations isochrones, aux petites amplitudes, mais leur durée T est plus petite que celle T_1 qui correspondrait à la rotation autour d'un axe fixe passant par le point de contact de l'arête et du plan. On a, si r est petit devant h :

$$T = T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{h} \right),$$

Depuis, les différents expérimentateurs se sont préoccupés de cette correction en cherchant à déterminer le rayon de la section terminale de l'arête. Mais il est impossible de l'obtenir avec assez de précision.

D'ailleurs, il est probable que ce rayon dépend du point de contact de l'arête et du plan et que dans l'oscillation du pendule, il intervient par une valeur moyenne, variable avec l'amplitude.

Cette valeur peut d'ailleurs être considérable, par suite d'une usure du couteau ou par un défaut de taille. D'après Defforges on rencontre facilement, avec les méthodes de taille ordinaire, des courbures de l'ordre de plusieurs dixièmes de millimètre de rayon, avec des différences du même ordre d'un couteau à l'autre. C'est le cas de couteaux obtenus par la méthode de Kater, qui consiste à aiguiser le couteau très finement sur un plan garni d'émeri et à le passer ensuite sur le plan pour abattre les irrégularités du tranchant et donner à l'arête une forme rectiligne.

On peut cependant rendre l'arête très fine. Defforges admet que pour les couteaux en agate, du pendule de Brunner qu'il emploie, la partie arrondie de l'arête — limitée par un biseau très petit à 120° — n'a qu'une largeur de 2 à 3 μ .

(¹) EULER. *Nova Acta Acad Petropol.*, t. VI, 1788.

Biot, ayant mis en doute l'influence de la cylindricité du couteau, Bessel ⁽¹⁾ fit d'intéressantes recherches sur ce sujet. D'abord, il voulut éclaircir par le calcul, l'influence d'un roulement de l'arête et fit l'hypothèse générale que la courbe terminale de l'arête était une courbe du second degré.

Le calcul mit en évidence une influence sensible de la forme du couteau sur la durée d'oscillation surtout quand la courbe du second degré qui termine l'arête est une ellipse aplatie.

Bessel entreprit alors des expériences pour vérifier les conclusions du calcul. En aiguisant finement le couteau, ou, au contraire en usant l'arête, il put constater des variations concordant d'une façon assez satisfaisante avec sa théorie, en particulier une diminution nette de la durée d'oscillation aux petites amplitudes par l'effet d'une troncature de l'arête.

Les expériences de Biot et Arago ⁽²⁾ faites avec des couteaux dont les arêtes avaient des aplatissements très différents : 0 mm. 035 pour l'une, 0 mm. 007 pour l'autre, ont cependant donné des résultats très concordants. Bessel, signalant cette anomalie par rapport à sa théorie, pense qu'il s'agit de l'influence du genre de courbure.

La difficulté est en effet, non seulement de mesurer la largeur de la partie émoussée de l'arête, mais surtout de déterminer le rayon de courbure du cercle ou l'excentricité de l'ellipse qui termine l'arête. Comme la courbure joue dans l'hypothèse de Bessel (plus générale que celle de Laplace) un rôle fondamental, cette hypothèse échappe à peu près complètement au contrôle de l'expérience. Bessel, reconnaissant l'impossibilité de faire la correction exacte due à l'arête dans la détermination de la longueur du pendule à seconde, a pu dire qu'il n'était pas possible de mesurer cette longueur avec un pendule à fil suspendu à un couteau.

(1) BESSEL. *Recherches sur la longueur du pendule simple à secondes.*

(2) BIOT et ARAGO. *Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques.*

L'emploi du pendule réversible à couteaux fixes de Prony, Kater et Bohnenberger, laisse subsister la même incertitude, puisque les rayons de courbure des arêtes des deux couteaux sont en général différents.

Bessel a alors proposé, comme on sait, de faire osciller le pendule réversible autour de chacun de ses couteaux comme on le faisait jusque-là, puis de recommencer l'expérience après l'échange des couteaux. A condition d'opérer dans les mêmes limites d'amplitude, la moyenne des résultats permet l'élimination de l'influence de la courbure de l'arête.

Dans le même but Defforges ⁽¹⁾ a institué une méthode différentielle éliminant l'influence des couteaux, par la mesure de la différence de longueur de deux pendules oscillant dans les mêmes limites d'amplitude, sur le même support et avec les mêmes couteaux, les pendules ayant même poids, et leurs centres de gravité étant semblablement disposés par rapport aux arêtes des couteaux.

Signalons enfin que Bessel, puis Defforges ⁽²⁾ ont mis en évidence un glissement de l'arête sur le plan, s'ajoutant au roulement ; il est proportionnel à l'amplitude et on doit en tenir compte dans la correction de roulement.

Quelles que soient, la nature véritable du mouvement de l'arête et la méthode employée pour éliminer son influence, une incertitude subsiste. L'effet de l'arête dépend de la façon très irrégulière dont se fait le contact avec le plan. De là des anomalies importantes observées dans le mouvement du pendule à couteau.

2. — *Anomalies.* — Plusieurs auteurs ont signalé d'abord, que la formule ordinaire de réduction à l'amplitude infiniment petite ne concordait pas avec leurs observations.

Sabine ⁽³⁾ faisant osciller un pendule de Kater (le poids

(1) DEFFORGES. *Mémoires de la Société de Physique*, 1888.

(2) DEFFORGES. *C. R.*, 115, p. 28.

(3) SABINE. *Phil. Trans.*, 1831, p. 461.

le plus lourd étant en haut), constate que le nombre d'oscillations que le pendule fait par jour, est toujours plus grand, quand on l'observe aux petits arcs d'oscillations, que quand on le déduit des grands arcs.

Il trouve qu'il faut multiplier par 1,32 la correction ordinaire de réduction à l'amplitude infiniment petite pour rendre la durée indépendante de l'amplitude.

Quand le poids le plus lourd est situé en bas, la variation est moindre et le facteur à adopter est seulement 1,13.

Sabine suppose que l'anomalie provient du glissement du couteau sur le plan, mis en évidence par Bessel.

Baily⁽¹⁾, ayant fait osciller un pendule réversible successivement sur ses deux couteaux, trouve que la correction d'amplitude ordinaire s'applique exactement pour l'oscillation sur l'un des couteaux, mais que pour l'autre elle doit être augmentée de $\frac{1}{5}$ de sa valeur.

Les résultats de ces deux observateurs ne s'accordent pas. On ne peut s'en étonner si on lit la relation complète de leurs expériences ; ils décrivent en effet des anomalies inexplicables.

Par exemple, Sabine faisant osciller un même pendule sur des plans d'agate différents, mais en apparence identiques, trouve une différence de 1,46 oscillation par jour.

Baily fait osciller un pendule sur un même plan d'agate en tournant le couteau dans différents azimuths ; la différence dans le nombre des oscillations du pendule par jour s'élève à deux ou trois (soit une variation de durée de l'ordre de $\frac{1}{40.000}$).

M. de Freycinet⁽²⁾ signale dans ses observations du pendule des divergences de ce genre, la différence allant jusqu'à six oscillations par jour.

⁽¹⁾ BAILY. *Phil. Trans.*, 1832, p. 399.

⁽²⁾ *Voyage autour du monde*, par M. DE FREYCINET, p. 22.

C'est à la suite de l'exposé de ces diverses anomalies que Baily écrit la phase que nous avons déjà citée : « Ma conviction est que le pendule à couteau reposant sur des plans d'agate, tel qu'on le construit aujourd'hui, est, en fait un instrument très mal approprié aux délicates recherches auxquelles il a été originairement destiné. »

Observations de Bessel ⁽¹⁾. — Bessel tente d'expliquer les faits signalés par Sabine, en admettant une action du support et il entreprend d'intéressantes expériences pour déterminer l'action de plans de dureté variée.

Les plans les plus durs, agate, verre dépoli, tubes de verre, plan d'acier trempé — ne manifestent pas d'action sensible.

Avec des plans de laiton non polis, au contraire, l'influence du support apparaît, les durées d'oscillation deviennent plus courtes, surtout quand le gros poids du pendule (système Kater) est au-dessus du point de suspension. Il trouve par exemple :

Durée d'oscillation du pendule (gros poids en haut) sur :

plans d'agate.	1 sec. 0002433
plans de laiton	1 sec. 0002198

Les expériences sur le laiton ne s'accordent d'ailleurs pas entre elles.

En faisant osciller un pendule à couteau sur de gros fils de laiton, Bessel trouve une action beaucoup plus notable encore, et il se produit un fait nouveau : la durée d'oscillation diminue sensiblement à mesure que le pendule s'amortit.

Par exemple :

Arcs d'oscillation	Durée d'oscillation (gros poids en haut)
59'4 à 32'5	0 s. 9995905
32'5 à 19'5	0 s. 9994995
19'5 à 13'7	0 s. 9994446

(1) BESSEL. *Mémoire de l'Académie de Berlin* (1826).

Pour déterminer la cause de l'effet considérable obtenu avec le laiton, Bessel recherche au microscope et avec un dispositif amplificateur, s'il ne se produit pas un glissement du couteau sur ses supports. Il trouve en effet un mouvement de ce genre, mais toujours très petit (inférieur à $\frac{1}{1.000}$ mm.) et tout à fait insuffisant pour expliquer les anomalies observées.

Bessel conclut qu'il ne s'agit pas de l'effet d'un glissement du couteau mais de l'action d'une *force* agissant sur le couteau à petite distance de l'arête et provenant, d'une impression que fait l'arête dans ses supports. Cette force serait de nature élastique et due à la déformation des parties du plan en contact avec le couteau; elle n'aurait aucun rapport avec le frottement ordinaire, lequel n'agirait pas sur la durée, mais seulement sur l'amplitude.

Dans le cas de couteaux et de plans durs, Bessel admet que la force élastique est proportionnelle à l'élongation donnant une influence sur la durée indépendante de l'amplitude. Pour les substances qui gardent l'empreinte du couteau, le phénomène lui paraît tellement compliqué qu'il ne lui semble pas possible d'en donner une explication satisfaisante.

J'ai insisté un peu sur ces expériences de Bessel car elles constituent les premières recherches systématiques sur ce sujet important et délicat.

Observations de Thiesen ⁽¹⁾ *sur les oscillations des balances.* — Ces expériences avaient pour but de déterminer l'influence de la forme du couteau sur les oscillations de la balance, en vue des corrections à apporter dans les pesées de précision.

Thiesen constate une très grande variation de la durée avec l'amplitude et il conclut que pour réduire les durées d'oscillation de la balance à la même valeur on doit leur

(1) THIESEN. *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures*, t. V, p. 7 (2^e partie), 1886.

faire subir une correction qui en première approximation est proportionnelle au carré de l'amplitude, mais qui dépasse de beaucoup la correction ordinaire d'amplitude.

Par exemple, avec une balance dont la durée d'oscillation est d'environ 20 secondes il trouve, pour une amplitude de 0,0051 radians, qu'il faut retrancher de la durée observée, une correction 250 fois plus grande que la correction ordinaire $\left(\frac{\theta_0^2}{16} T\right)$ pour retrouver la durée d'oscillation à l'amplitude infiment petite.

Observations de Wilsing ⁽¹⁾. — Dans des observations préalables du pendule qui devait servir aux expériences de détermination de la densité moyenne de la terre, Wilsing constate que même sur des plans très durs, la durée d'oscillation corrigée de son pendule (de 1 minute à 3 minutes) dépend de l'amplitude. La variation est trois fois plus grande pour des plans d'acier non trempé, qu'avec des plans très durs (entre 120' et 20' d'amplitude).

Wilsing arrive à la conclusion suivante : « les changements variables avec l'amplitude et dus à l'action élastique du support, sont de l'ordre sur le pendule à secondes de la 6^e à la 7^e décimale ; ils croissent proportionnellement à l'amplitude et produisent un accroissement de la durée d'oscillation. Les réductions sont proportionnelles à la 3^e puissance de la durée et inversement proportionnelles au moment d'inertie du pendule ».

Expériences de Sokoloff ⁽²⁾. — Cet auteur étudie un pendule de 1/2 mètre de longueur avec un couteau et des plans d'agate. Il trouve, qu'entre des amplitudes de 60' et 30' la différence des durées d'oscillation (réduites par la formule

(1) WILSING. *Recherches sur les variations de la durée d'oscillation d'un pendule dépendant de la figure de l'arête, et variables avec l'amplitude*. Astr. Nach. 120 (1888).

(2) SOKOLOFF. *Matériaux pour servir à l'étude de la répartition de la force de la pesanteur en Russie*. Saint-Petersbourg, 1892. Astr. Nachr., t. CXX, 1889, p. 16.

ordinaire à l'amplitude infiniment petite) atteint 53 et 99 unités de la 7^e décimale selon que le poids lourd est placé au-dessous ou au-dessus du couteau (la distance du centre de gravité au couteau devenant deux fois plus petite dans le dernier cas). Il ne constate pas de variation avec le poids du pendule (1 kg. et 2 kg.).

3. — Il résulte de toutes ces observations un effet certain du support sur le mouvement du pendule ; cet effet est fonction de l'amplitude. La durée de l'oscillation diminue à mesure que l'amplitude diminue. Mais cette influence est variable : elle dépend essentiellement de la façon dont le couteau est posé et oscille sur le support. De là les nombreuses anomalies observées dans le mouvement du pendule.

Je vais maintenant exposer mes résultats sur les écarts à la loi d'isochronisme du pendule à couteau et à cylindre. Ils confirment et précisent ceux des précédents auteurs

III. — Expériences sur l'oscillation d'un pendule libre à couteau d'acier reposant sur des plans d'acier ou d'agate.

1. — Dans ces expériences on doit chercher à avoir une très grande précision. Les photographies sont faites à 13 minutes environ d'intervalle, les pendules ayant effectué 400 oscillations doubles. Dans ces conditions on peut atteindre l'approximation du $\frac{1}{10.000.000}$ dans la détermination de la durée d'oscillation du pendule à étudier par rapport à celle du pendule de comparaison (T').

Comme le pendule ne s'amortit que très lentement (l'amplitude diminue de $\frac{1}{200}$ mm. environ à chaque oscillation), on peut obtenir un certain nombre de valeurs de la durée en fonction de l'arc d'oscillation.

La correction d'amplitude se fait en calculant les amplitudes initiale et finale à partir de leur mesure sur le cliché et

en utilisant le grossissement de l'appareil photographique et la distance de l'index au couteau. On applique la formule précédemment démontrée.

Or, la réduction étant ainsi faite à l'amplitude infiniment petite, je constate toujours que la durée d'oscillation mesurée sous les petits arcs (de quelques minutes) est plus faible que celle qui correspond aux grands arcs (de 1° à 2°).

Dans des expériences préliminaires faites avec des couteaux quelconques, non spécialement travaillés, la variation est très sensible. Voici, par exemple, le résultat d'une de ces expériences :

Pendule de 3 kilog. à couteau d'acier (la section est un triangle équilatéral) oscillant sur plan d'acier non trempé $T' = 1$ s. 85.

Amplitude en radians	Correction d'amplitude	Durée non corrigée	Durée corrigée
0,0346	74,8 $10^{-6} T'$	1,000229 T'	1,000154 T'
0,0321	64,4	1,000210	1,000146
0,0284	50,4	1,000188	1,000138
0,0240	36,0	1,000162	1,000126
0,0204	26,0	1,000140	1,000114
0,0153	14,6	1,000106	1,000091
0,0071	3,1	1,000078	1,000075

On voit que la variation relative, dans les limites d'amplitude considérées, atteint $\frac{8}{100.000}$. C'est une variation considérable et tout à fait inattendue. Cependant le couteau paraît bon, et semble ne pas présenter d'irrégularités.

Avec des couteaux que j'ai fait soigneusement polir, j'ai, en général, obtenu une variation moins considérable, mais les résultats n'ont jamais été constants. Il est, en tous les cas, impossible de prévoir *a priori* l'influence du

couteau sur la durée d'oscillation. Un couteau bien travaillé peut donner une variation sensible, que rien n'explique, et il suffit de le faire reposer sur une autre partie du plan de suspension pour que son effet soit très différent. Cela a lieu, même s'il s'agit de plans très durs, des plans d'acier trempé ou d'agate, par exemple.

Un couteau d'acier, bien travaillé, oscillant sur plans d'agate, m'a donné, entre autres, les résultats suivants :

Amplitude en radians	Correction d'amplitude	Durée non corrigée	Durée corrigée
0,0285	50,7 10 ⁻⁶ T'	1,0001781 T'	1,0002288 T'
0,0245	37,5	1,0001912	1,0002287
0,0205	26,2	1,0002021	1,0002283
0,0177	19,9	1,0002085	1,0002284
0,0086	4,5	1,0002238	1,0002283
0,0056	1,9	1,0002262	1,0002281

Malgré le grand nombre d'expériences que j'ai faites à ce sujet (couteaux et plans d'acier), je ne veux pas m'y arrêter plus longtemps, car je pense qu'on ne peut rien en tirer d'utile. Il faut en retenir que pour les couteaux et les plans de grande dureté, la différence des durées aux grands et aux petits arcs d'oscillation, est de l'ordre du millionième ; elle atteint même sans raison apparente le cent millième de seconde. Comme l'effet dépend de la façon dont le couteau repose sur le plan et qu'il est impossible de déterminer comment se fait le contact, on ne peut déduire aucune conclusion intéressante, de ces expériences, en dehors de l'existence certaine de cet effet.

2. — Pour déterminer la nature de l'action du support sur le couteau, j'ai pensé qu'il était nécessaire d'amplifier cette action, et de faire des expériences plus faciles à interpréter en remplaçant le couteau (dont on ne peut connaître

la courbure) par un cylindre, de rayon facile à mesurer. Je me suis donc proposé de faire une étude d'un pendule suspendu à un cylindre métallique.

IV. — Expériences sur des pendules suspendus à des cylindres d'acier et roulant sur des plans de fer.

1. — Le cylindre est fixé bien perpendiculairement à la tige du pendule de façon que le contact sur le plan se fasse suivant une génératrice. Le pendule bat à peu près la seconde.

Donnons de suite le résultat obtenu dès les premières expériences : La durée de l'oscillation corrigée de l'erreur circulaire est fonction de l'amplitude. Elle diminue à mesure que l'arc d'oscillation décroît. C'est le même sens de variation qu'avec les pendules à couteau, mais l'effet est beaucoup plus considérable.

2. — Avant de préciser les résultats, nous pouvons nous demander ce que la théorie prévoit. Nous avons déjà vu — c'est la solution du problème d'Euler — que les petites oscillations doivent rester isochrones.

Mais en est-il de même des oscillations de grande amplitude ? La théorie complète du roulement d'un cylindre sur un plan, en tenant compte de l'influence des grands arcs d'oscillation et du frottement, permet-elle d'expliquer les effets observés ?

Cette théorie a été faite par quelques auteurs, mais d'une façon assez complexe ⁽¹⁾. Il est possible de traiter le problème beaucoup plus simplement. Dans la Note II (à la

(¹) MOSELEY. *On the rolling motion of a cylinder*, *Phil. Trans.*, t. CXLI (1851); VILLARCEAU, *Ann. Obs. Paris*, t. XV, 1880; DENIZOT, *Verh. der phys. Ges.*, t. III, 213, 1901.

fin du mémoire), je calcule dans l'hypothèse des grands arcs d'oscillation et d'un frottement de roulement tel qu'on le conçoit habituellement, la durée d'oscillation d'un pendule suspendu à un cylindre.

J'arrive au résultat suivant : Dans le cas où le travail de frottement est celui de la réaction du plan appliquée à une distance constante δ du centre instantané de rotation, la partie, variable avec l'amplitude, de la durée d'oscillation ne dépend pas du coefficient de frottement, mais seulement du rapport du rayon r du cylindre à la longueur l du pendule simple synchrone.

On a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{1}{4} \frac{r\theta_0^2}{l} \right)}$$

3. — *Les faits expérimentaux sont en désaccord avec la théorie ordinaire.* — Nous trouvons théoriquement que la variation de la durée corrigée avec l'amplitude doit être :

$$\varphi(\theta_0) = \frac{\pi^2 r}{g T_0} \theta_0^2$$

Nous allons voir que cette formule ne s'accorde pas avec les faits.

4. — *Première expérience.* — Le pendule est suspendu par un cylindre d'acier doux de 7 mm. 5 de diamètre qui roule sur un plan de fer.

Le pendule a un poids de 2.190 gr., la distance de son centre de gravité au cylindre est 74 cm. 9, le contact du cylindre avec le plan a lieu sur une longueur totale de 2 cm.

La variation de durée avec l'amplitude est telle que la précision du $\frac{1}{100.000}$ suffit largement.

Le tableau suivant résume l'expérience.

Amplitude en radians	Durée corrigée
0,0269	0,99741 T'
0,0228	0,99728
0,0191	0,99723
0,0173	0,99715
0,0155	0,99701
0,0114	0,99682
0,0096	0,99649
0,0088	0,99640
0,0065	0,99613
0,0057	0,99592
0,0044	0,99547
0,0031	0,99428
0,0024	0,99372
0,0013	0,99001
0,0005	0,98223

De l'examen de ce tableau il ressort les faits suivants :

1° La durée d'oscillation décroît beaucoup à mesure que l'amplitude diminue; la variation relative atteint 0,015 de l'amplitude initiale à l'amplitude finale.

2° C'est surtout aux petits arcs d'oscillation que la variation est accusée.

Aucun de ces deux faits ne pouvait se déduire de la théorie ordinaire (La formule déduite de cette théorie donne une variation inférieure à $\frac{1}{100.000}$ sec.).

5. — *Anomalies.* — En recommençant la même expérience à plusieurs reprises, mais en faisant osciller le pendule dans des azimuths différents, en retournant le pendule face pour face, etc., j'ai obtenu des anomalies du même genre que celles que j'avais observées pour le pendule à couteau. Cependant étant donnée la variation considérable de la durée d'oscillation avec l'amplitude, dans ces expériences, j'ai pu, à propos de ces anomalies, constater un fait très net : L'effet du roulement varie, en général, d'une expérience à l'autre, mais la durée de l'oscillation aux grands arcs garde tou-

jours une valeur bien déterminée et constante au $\frac{1}{10.000}$. C'est la durée des petites oscillations qui n'a pas une valeur fixe ; selon la position du cylindre sur le plan, elle peut subir des variations atteignant le $\frac{1}{500}$ de sa valeur. Je crois inutile de donner à ce sujet de nouveaux tableaux de résultats. L'allure de la variation est tout à fait analogue à la précédente ; seule la grandeur de cette variation peut changer très sensiblement.

Le fait important à retenir est que dans ces expériences faites dans des conditions en apparence identiques, *seule est affectée, la durée des oscillations correspondant aux petits arcs.*

6. — *Durée de l'oscillation affranchie de l'action du support (Durée vraie).* — Si on construit la courbe de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude, on voit qu'elle a une allure hyperbolique (fig. 16, courbe 1). D'autre part, ce que nous venons de dire des anomalies n'atteignant que la durée des petites oscillations, nous suggère l'idée que pour une amplitude suffisamment grande la durée doit être indépendante des irrégularités et de la nature du support. Nous pouvons appeler cette durée, *la durée d'oscillation vraie du pendule*. Elle doit être, évidemment, réduite à l'amplitude infiniment petite par la correction ordinaire. Soit T_0 sa valeur et T la durée corrigée correspondant à l'amplitude θ_0 nous sommes amenés à poser :

$$(1) \quad T = T_0 \left(1 - \frac{K}{\theta_0} \right)$$

Identifions les résultats expérimentaux avec cette expression, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = 0,99765 \text{ } T' \\ K = 981.10^{-6} \end{array} \right.$$

L'identification se fait bien, comme le montre le tableau suivant où sont données, en fonction de l'amplitude, les valeurs de $(T_0 - T)$ mesurées et calculées.

Amplitude en 10^{-4} rad.	269	228	191	173	155	114	96	88	65	57	44	31	24	13	5
$T_0 - T$ mesuré en 10^{-4} Tsec				5	6	8	11	12	15	17	21	33	39	76	153
$T_0 - T$ calculé	3	4	5	5	6	8	10	11	15	17	22	32	40	75	203

C'est seulement aux très petites amplitudes que la courbe expérimentale s'écarte de la courbe théorique. L'expérience montre en effet que pour une amplitude nulle, la durée tend vers une limite déterminée.

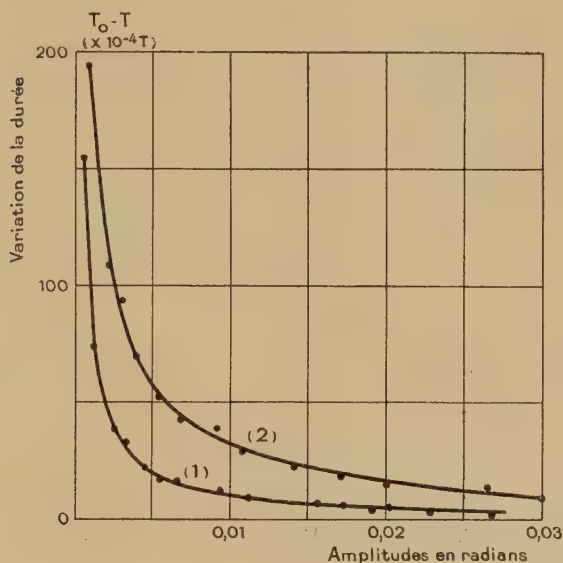


Fig. 16.

Variation de la durée d'oscillation d'un pendule à cylindre en fonction de l'amplitude.

- (1) Cylindre d'acier sur plans de fer ;
 (2) Cylindre d'acier sur plans de plomb.

7. *Observation directe de la durée vraie.* — Si l'action du support était nulle, la durée d'oscillation serait T_0 . On peut essayer de le vérifier expérimentalement, en faisant

osciller sur le plan un pendule à couteau (pour lequel l'action du support est petite) dont la longueur du pendule simple synchrone est calculable à partir de celle du pendule à cylindre considéré.

J'ai pris le même pendule que dans l'expérience précédente, mais dans la monture réglable qui portait le cylindre j'ai adapté un couteau de telle façon que son arête soit à la même distance du centre de gravité du pendule que précédemment, le cylindre se trouvait de ce point.

En employant l'ingénieux artifice de Borda, qui consiste à régler la suspension de telle sorte que, seule, elle oscille dans le même temps que le pendule lorsqu'il y est suspendu, on n'a pas à tenir compte de la forme particulière de la suspension, car elle n'a plus d'influence sur le mouvement.

Le pendule étant mis en oscillation sous une grande amplitude, je trouve comme durée :

$$T_1 = 0,99997 \text{ T'}$$

La durée vraie du pendule à cylindre doit être :

$$T_0 = T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{h} \right)$$

Or,

$$r = 0 \text{ cm. } 375 \quad h = 74 \text{ cm. } 9$$

On trouve :

$$T_0 = 0,99748 \text{ T'}$$

C'est un nombre qui s'écarte de moins de $\frac{2}{10.000}$ de la valeur de la durée d'oscillation limite du pendule à cylindre, obtenue par la formule (1).

Etant donnée la difficulté d'adapter le couteau exactement à la même hauteur que le cylindre, l'accord entre les deux valeurs de T_0 doit paraître très satisfaisant.

La durée vraie de l'oscillation du pendule à cylindre, c'est-à-dire la durée rendue indépendante de l'action mutuelle de la suspension et du plan, est donc bien celle qui correspond aux grandes amplitudes. *Si donc on veut corri-*

ger le pendule de l'influence du roulement, la correction devra porter sur la durée des petites oscillations.

C'est la conclusion inverse de celle à laquelle sont arrivés les quelques auteurs qui ont étudié l'influence du roulement en fonction de l'amplitude. Ces auteurs ont fait porter la correction sur les durées déduites des observations aux grands arcs.

8. — *Influence de la distance du centre de gravité au cylindre.* — Pour mettre en évidence l'influence de la distance h du centre de gravité au cylindre, j'adapte le cylindre qui a servi à la première expérience à un pendule constitué d'une tige métallique et d'une masse pesante, mais de telle sorte que cette masse puisse se fixer à volonté au-dessus ou au-dessous du cylindre. Le pendule oscille sur les mêmes plans que précédemment. Dans les deux cas, les pendules sont réglés de façon à avoir une durée d'oscillation simple voisine de 1 seconde.

J'extrait du tableau des résultats, deux valeurs de la durée; l'une correspondant à un grand arc, l'autre à un petit arc d'oscillation.

Poids en bas. — Le centre de gravité est à une distance $h = 74$ cm. 1 du cylindre. On trouve comme durée simple :

0 sec. 99655 pour une amplitude de 0 rad. 030

0 sec. 99123 pour une amplitude de 0 rad. 002

Poids en haut. — Le centre de gravité est à une distance $h = 22$ cm. 6 du cylindre ; on obtient alors :

0 sec. 98863 pour une amplitude de 0 rad. 030

0 sec. 97222 pour une amplitude de 0 rad. 002

Soit une différence dans les durées d'oscillation de 0 sec. 00532 pour le premier pendule, et 0 sec. 01641 pour le deuxième entre les mêmes limites d'amplitude. Le rapport de ces variations est 3,1 le rapport inverse des distances h est 3,3.

L'influence du roulement est inversement proportionnelle à la distance du centre de gravité au cylindre.

Quelques conséquences de ce fait. — Il suit de là que pour un cylindre (ou un couteau) déterminé, l'effet du roulement sera plus sensible sur les pendules courts que sur les pendules longs.

Cela explique les deux corrections différentes, trouvées par Sabine, pour ramener la durée d'oscillation à une valeur indépendante de l'amplitude, selon que le gros poids du pendule était au-dessus ou au-dessous du cylindre. C'est dans le premier cas que la correction est la plus grande.

Cela explique aussi la variation très considérable trouvée par Thiesen dans son étude de l'oscillation de la balance. Dans ce cas, l'oscillation est très lente, h est très petit ; l'effet est très grand.

Wilsing trouve que les changements de durée variables avec l'amplitude sont pour une durée d'oscillation déterminée inversement proportionnels au moment d'inertie du pendule. C'est le même résultat.

Enfin il me paraît probable que certaines anomalies signalées par Defforges ⁽¹⁾ et attribuées par lui au glissement dans des mesures de la pesanteur, par des pendules de longueurs différentes, peuvent s'expliquer par les mêmes considérations, car les divergences sont dues principalement aux pendules courts.

9. — *Influence du rayon du cylindre.* — En suspendant à un cylindre de 17 mm. 7 de diamètre, le pendule qui a été utilisé dans la première expérience, et faisant rouler le système sur les mêmes plans, nous obtenons une courbe de variation de T en fonction de θ_0 analogue à la première, dont voici quelques points :

(1) DEFFORGES. *C. R.*, t CXV, p. 28.

Amplitude en radians	Durée observée
0,0325	0,9959 T'
0,0242	0,9957
0,0195	0,9956
0,0063	0,9943
0,0012	0,9883

La variation est très voisine de celle qui a été obtenue avec le cylindre de 7 mm. 5 de diamètre.

On trouve ici :

$$T_0 = 0,9962 T' \quad \text{et} \quad K = 947. 10^{-6}$$

Avec un cylindre de 3 mm. 2 roulant dans les mêmes conditions que les précédents, la variation a été un peu moindre que dans la première expérience (variation relative de $\frac{4}{10.000}$ entre les amplitudes 0 rad. 030 et 0,001).

Je ne crois d'ailleurs pouvoir tirer aucune conclusion précise de ces expériences, concernant l'influence du rayon du cylindre; d'une part, à cause des variations accidentelles de durée souvent observées aux petits arcs, et d'autre part, parce que je n'ai aucune assurance que les différents cylindres, quoique tous en acier, possédaient la même dureté ou la même élasticité. Cependant, sans qu'il soit possible de préciser la loi, on peut dire qu'à mesure que le rayon diminue, l'effet du roulement diminue, mais l'influence du rayon du cylindre est petite.

10. — *Influence du poids du pendule.* — En faisant osciller des pendules de poids très différents (de 2 k. à 10 k.) suspendus à un même cylindre d'acier, je ne trouve pas de différence sensible entre les effets constatés. Si le poids du pendule a une influence, elle est petite et masquée par les anomalies qui se rencontrent d'une façon inévitable d'une expérience à l'autre.

V. — Expériences avec des plans et cylindres variés.

1. — La nature du plan a une très grande influence sur les changements dans la durée d'oscillation produits par le roulement du cylindre.

Je ne puis donner tout le détail de mes expériences à ce sujet, et je simplifierai l'exposé des résultats en faisant dès maintenant une remarque qui s'applique à tous les cas étudiés :

Quelle que soit la grandeur de la variation de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude, cette variation a toujours l'allure hyperbolique que nous lui avons trouvée dans le cas précédemment étudié où un cylindre d'acier roulait sur un plan de fer, et elle est surtout importante aux petites amplitudes.

Montrons par exemple que même dans un cas où l'on pourrait s'attendre à trouver un phénomène nettement différent de celui présenté par l'acier, on a au contraire un effet analogue. Ce cas est celui du roulement d'un cylindre d'acier sur des plans de plomb.

2. — *Cylindre d'acier roulant sur des plans de plomb.*
Le cylindre est celui qui a été utilisé dans la première expérience ; il est adapté au même pendule. Les plans de plomb, ajustés bien horizontalement, ont été polis ; le contact entre le cylindre et les plans se fait sur une longueur totale de 2 cm. Voici le tableau résumant l'expérience :

Amplitude	Durée corrigée
0,0342 rad.	0,9968 T'
0,0258	0,9964
0,0200	0,9961
0,0166	0,9958
0,0138	0,9953
0,0108	0,9947
0,0091	0,9938
0,0069	0,9933
0,0054	0,9923
0,0041	0,9906
0,0030	0,9992
0,0022	0,9868
0,0011	0,9781

La variation (voir figure 16, courbe 2) est encore bien représentée par une expression de la forme

$$T = T_0 \left(1 + \frac{K}{\theta_0} \right)$$

On trouve :

$$T_0 = 0 \text{ sec. } 9976 \text{ T'}$$

$$K = 29.10^{-6}$$

Il est remarquable qu'on retrouve ici pour la durée vraie T_0 la même valeur que dans le cas de plans d'acier.

T_0 est bien la durée d'oscillation soustraite à l'influence du support.

D'ailleurs il y a là un fait absolument général et qui ne fait que confirmer nos premières vues. Quelle que soit la nature du plan sur lequel on fait rouler le cylindre, on trouve toujours la même durée d'oscillation limite, déduite de la durée des oscillations aux grands arcs. On s'approche d'autant plus de cette durée, que l'amplitude est plus grande, et que, pour une amplitude donnée, le plan de suspension est plus dur. Au contraire, la durée aux petites amplitudes varie beaucoup avec la nature du plan.

Si on examine la surface des plans de suspension, on cons-

tate que le roulement du cylindre a laissé de légères empreintes. Il y a eu déformation permanente du métal. Sur les plans de fer, on n'observe rien de semblable. Il est remarquable que malgré la déformation permanente qui résulte du roulement, dans le cas du plomb, le phénomène ne soit différent qu'en grandeur de celui observé avec le fer. *Et c'est là un fait général.*

Nous pourrions donc nous contenter, pour caractériser l'effet du roulement, de donner la différence entre la durée d'oscillation observée aux grands arcs ($\frac{5}{100}$ rad. par exemple) et la durée correspondant à une amplitude de $\frac{1}{1.000}$ rad. (au-dessous de laquelle les observations deviennent imprécises).

3. — Les expériences que je vais résumer maintenant, ont été faites avec le pendule de 2 k. 190 suspendu au cylindre d'acier de 7 mm. 5 de rayon.

Plans durs

1^o *Plans de fer.* — C'est l'expérience qui a été reproduite au début de l'étude du roulement. Dans les limites adoptées pour caractériser l'effet, celui-ci est d'environ :

$$0 \text{ sec. } 007.$$

C'est la variation relative de la durée d'oscillation simple, celle-ci étant sensiblement de 1 seconde. Ce nombre représente, une moyenne des observations faites en mesurant l'effet du roulement du cylindre dans les différentes régions du plan de suspension.

2^o *Plans d'acier doux.* — On trouve comme effet :

$$0 \text{ sec. } 004.$$

Même remarque qu'avec le fer, les variations d'une expérience à l'autre étant cependant plus petites (de l'ordre de $\frac{1}{1.000}$ sec.).

3° *Plans d'acier trempé.* — La variation est de :

0 sec. 0004.

4° *Plans de verre.* — Le cylindre oscille sur deux glaces de verre bien horizontales. On trouve entre les grands et les petits arcs une différence de :

0 sec. 00035.

Mais même sur ces plans parfaitement polis, on obtient des différences sensibles, en changeant l'endroit du plan où roule le cylindre. Par exemple, on trouve successivement aux arcs de $\frac{1}{1.000}$ rad. les valeurs suivantes de la durée :

0 sec. 99742

0 sec. 99736

0 sec. 99741

Mais toujours, aux grands arcs, on obtient une même valeur à $\frac{1}{100.000}$ près : 0 sec. 99772.

5° *Plans et cylindre de stellite.* — Comme il me paraissait hors de doute que l'effet du roulement était essentiellement en rapport avec la dureté des surfaces en contact, je me suis proposé d'étudier un corps de très grande dureté. La *stellite*, alliage de tungstène, chrome et cobalt, est le métal le plus dur, connu actuellement ; j'ai donc fait faire à la meule (c'est la seule façon de travailler ce métal) un cylindre de stellite de 7 mm. 5 de diamètre et fait polir deux plans du même métal.

L'effet n'est pas négligeable. La moyenne d'une série d'expériences donne comme variation :

0 sec. 00023.

Même avec les corps les plus durs, il y a donc une déformation qui exerce son influence sur la durée d'oscillation.

Plans de faible dureté

1° *Plans d'aluminium.* — L'effet est très variable aux petites amplitudes ; on trouve des nombres compris entre 0 sec. 0082 et 0 sec. 0106. Admettons la moyenne 0 sec. 009.

2^o *Plans et fils de plomb.* — a) La première expérience faite, (2), donne le résultat déjà indiqué (voir page 82) ; une variation de :

0 sec. 0187.

b) L'expérience refaite avec un cylindre d'acier de 17 mm. 7 donne un résultat de même ordre de grandeur ;

c) L'effet doit dépendre, de la façon dont le cylindre pénètre dans le support sous l'action du poids du pendule. Si donc, on diminue la longueur suivant laquelle le cylindre et le plan sont au contact, on doit s'attendre à voir augmenter l'effet.

C'est bien ce qui a lieu. La ligne de contact entre le cylindre et le plan ayant été réduite de 2 cm. (longueur correspondant à l'expérience a) à 3 mm., on obtient comme variation :

0 sec. 083.

d) En faisant rouler le cylindre sur des *fils de plomb* de 2 mm. 56 de diamètre on a comme effet :

0 sec. 12.

Soit plus de $\frac{1}{10}$ de seconde de différence de durée entre les grandes oscillations et les petites.

Et on observe toujours le même fait : malgré la très rapide décroissance de la durée d'oscillation quand l'amplitude diminue, il apparaît manifestement que si l'on pouvait faire la mesure sous une amplitude suffisante, on retrouverait la durée vraie de l'oscillation du pendule ;

e) En même temps que cette très grande variation de durée, on observe une décroissance très rapide de l'arc d'oscillation. Le pendule revient au repos après 240 oscillations seulement. Je reviendrai plus loin, sur la question de la décroissance des arcs ;

f) On peut penser que cette action très importante du support doit s'accompagner de déformation permanente du métal. On trouve en effet dans le cas précédent que le cylindre

a laissé dans le plomb de fortes empreintes, la largeur de ces empreintes est de l'ordre de 2 mm. et leur profondeur d'environ $\frac{1}{2}$ mm.

g) Abandonnons le pendule, pendant deux heures, au repos sur les mêmes fils de plomb, après l'expérience (d), puis lançons-le à nouveau. Il a cette fois un amortissement beaucoup plus considérable encore; le pendule revient au repos après 20 oscillations seulement. D'autre part la variation de sa durée d'oscillation est tellement considérable qu'on la constate très aisément en suivant simplement du regard les oscillations du pendule qu'on étudie et du pendule de comparaison. On trouve une variation énorme :

0 sec. 5.

Le pendule oscille deux fois plus vite (aux petites amplitudes) que sur des supports durs.

La largeur de l'empreinte est de 4 mm. 2.

Remarque sur le dernier fait. — J'ai retrouvé à plusieurs reprises sur les supports relativement mous, le fait que nous venons de constater pour le plomb.

Sur des supports d'aluminium par exemple, avec un pendule de 5 k. et un cylindre de 7 mm. 5 de diamètre, la durée simple aux petites amplitudes est trouvée de 1 sec. 0172 dans une première expérience.

Après un repos de deux heures du pendule, on le remet en oscillation sous de très petits arcs. On trouve : 1 sec. 0120.

Sous l'effet prolongé de la pression exercée par le pendule le cylindre a dû pénétrer plus profondément dans le support.

4. — *Observation du mouvement du cylindre.* — En installant un microscope de faible grossissement en face de la partie inférieure du cylindre, on peut constater que, au moins dans les cas où le plomb a été fortement entamé, le mouvement s'opère de la façon suivante : le pendule étant par exemple à l'extrémité droite de sa course, et

revenant vers sa position d'équilibre, le cylindre roule le long de la gorge ABC, puis il vient toucher le bord C de la gorge et à ce moment il cesse de rouler et glisse sur lui-même, en tournant autour de son centre (fig. 17). Quand le pendule revient de gauche à droite, c'est le mouvement inverse du

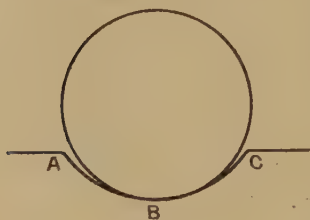


Fig. 17.

cylindre qui se produit. Le glissement est de plus en plus grand à mesure que la gorge devient plus large.

Si elle est peu étendue, le mouvement de glissement est très faible, mais on observe que le cylindre et le support sont au contact sur une assez grande longueur et pendant le mouvement, on n'a pas l'impression que le cylindre roule réellement mais qu'il tourne autour de A puis autour de C.

5. — *Autres expériences. Ecrouissage des plans de suspension.* — 1° *Plans de laiton.* — En faisant osciller le même pendule à cylindre sur des plans de laiton, j'obtiens d'abord une variation assez faible. La durée d'oscillation aux grands arcs corrigée de l'erreur circulaire est :

0 sec. 99752.

Le pendule continue à osciller, et, sous 0.001 rad. je trouve :

0 sec. 99693,

soit une différence d'environ 0 sec. 0006.

Je change alors la position du cylindre et je le fais rouler, mais sous une très faible amplitude; je trouve comme durée :

0 sec. 9872,

soit une différence de $\frac{1}{100}$ de seconde avec l'observation primitive correspondante (à faible amplitude).

Sous les grandes amplitudes, le pendule redonne sensiblement la même durée que dans l'expérience précédente.

Comme la première hypothèse à faire, était qu'on se trouvait en présence d'une anomalie analogue à celles que nous avons déjà rencontrées aux petites amplitudes, mais particulièrement importante, j'ai cherché à donner plus de constance au caractère du roulement en remplaçant les plans de laiton par des fils de laiton (de 2 mm. 8 de diamètre), le contact devant être, alors, mieux défini. Ces fils avaient été, au préalable, chauffés au rouge et trempés dans l'eau froide (laiton recuit, mou¹).

2^o *Fils de laiton.* — Avec ces fils j'ai immédiatement reconnu des faits analogues à ceux que je viens de signaler, mais plus considérables encore.

L'expérience suivante va nous mettre sur la voie de l'explication des faits. Je mets en mouvement le pendule *sous une amplitude très faible*, après l'avoir posé sans choc sur les fils de laiton.

J'obtiens comme durée :

0 sec. 9663 pour 0.001 rad

Sans le déplacer sur les fils, je le lance alors à grande amplitude. La mesure donne :

0 sec. 9975 pour 0.05 rad.

0 sec. 9968 pour 0.001 rad.

Et désormais, si après un certain temps de repos, on relance le pendule, c'est ce dernier nombre qu'on retrouve pour les petits arcs, ou un nombre voisin. Il présente par rapport à la première valeur trouvée une différence de :

0 sec. 0305

L'explication qui s'impose, est que, par suite de l'oscillation du cylindre à grande amplitude, le métal s'est écroui, est devenu plus dur. Cette augmentation de dureté se traduit par une augmentation de la durée d'oscillation aux petits arcs. Précisons par l'expérience suivante, qui va nous montrer que l'état de dureté acquis par le métal n'est fonction que de la vitesse maximum de roulement qui a eu lieu au point considéré.

Lançons le pendule sous une amplitude déterminée, et laissons-le s'amortir librement; notons ensuite la durée aux petites oscillations. Par exemple nous obtenons avec une première amplitude maximum de 0 rad. 0032 :

Pour 0,0032 rad. $T = 0 \text{ sec. } 98518$

Pour 0,0010 rad. $T = 0 \text{ sec. } 98418$

Si nous lançons à nouveau le pendule, à l'amplitude de 0,0032, ou à une amplitude inférieure, *mais en ayant bien soin de ne pas la dépasser*, nous obtenons exactement les mêmes résultats que précédemment. La courbe de la durée T en fonction de l'amplitude est bien déterminée, à condition qu'on ne dépasse pas l'amplitude initiale.

Lançons à nouveau le pendule, mais à une amplitude initiale plus grande. Nous obtenons maintenant entre cette amplitude et celle de 0 rad. 001 une courbe également bien déterminée, indépendante de son sens de parcours, mais qui ne se raccorde pas avec la première.

Et ainsi de suite. Dans chaque série d'expériences, la courbe $T = f(\theta_0)$ ne dépend que de l'amplitude maximum atteinte.

Dans le tableau suivant, je donne les valeurs de T uniquement pour les valeurs extrêmes de chaque série d'expériences.

Amplitude		Durée corrigée
1)	0,0032 rad. 0,001	0,98518 sec. 0,98418
2)	0,017 0,001	0,99233 0,99198
3)	0,035 0,001	0,99446 0 99412
4)	0,052 0,001	0,99583 0,99517
5)	0,095 0,001	0,99740 0,99649

Cette expérience ne peut s'interpréter qu'ainsi : la dureté du laiton est fonction du travail antérieur subi par le métal. Elle met en évidence la propriété que possède le métal de s'écrouir. L'état définitif du métal sous l'influence d'un travail déterminé s'acquiert d'ailleurs assez vite, car si après l'une quelconque de ces expériences, on continue à faire osciller le pendule en restant au-dessous de l'amplitude initiale, on ne modifie pas la durée mesurée aux petites amplitudes.

Nous pourrions admettre que cette durée d'oscillation est en relation immédiate avec la dureté, et mesurer par convention la dureté par l'inverse de la différence des durées d'oscillation aux grands arcs (où elle a la valeur limite) et aux petits arcs, ou mieux encore par la constante K de la formule (1).

Des études dans le genre de celle que nous venons de faire sur le laiton auraient comme intérêt :

1° D'atteindre de façon relativement précise la notion de dureté assez mal définie jusqu'ici ;

2° D'étudier la façon dont la dureté est fonction du travail antérieur subi par le métal. Ici ce travail se présente sous une forme simple et calculable puisqu'il s'agit d'un cylindre roulant avec une vitesse connue et exerçant une force connue.

3° *Plans de cuivre rouge.* — Les faits sont en tous points analogues à ceux que nous venons de mettre en évidence pour le laiton. Comme je ne me propose pas une étude spéciale des métaux, j'indiquerai rapidement le résultat :

Entre les grandes amplitudes (0,03 rad.) et l'amplitude 0,001 rad., variation de durée de :

$$0 \text{ sec } 0012.$$

Mais si on a mis le pendule en mouvement à une amplitude initiale très faible, aussitôt après l'avoir posé sur son support, le métal, encore mou, donne une différence de durée de 0. sec. 014 par rapport à la durée vraie,

4^o *Plans non métalliques. Bois.* — On observe à l'aide de l'oscillation du cylindre que :

1^o La dureté dépend comme pour les deux métaux précédents, du travail de roulement subi antérieurement (la variation de cette dureté est cependant moindre qu'avec le laiton);

2^o La variation de durée dépend dans une notable proportion de l'orientation du cylindre par rapport aux fibres du bois.

Mica. — Résultat analogue, et même, variations plus accusées en ce qui concerne l'orientation du cylindre.

Je ne crois pas utile de donner le détail de ces expériences. Elles peuvent fournir des renseignements intéressants sur les corps expérimentés — et je les reprendrai dans ce sens — mais du point de vue du pendule, elles ne font que confirmer l'influence importante de la nature du support sur l'oscillation.

6. — *Cylindres métalliques de nature diverse.* — De même je passerai rapidement sur une série d'expériences que j'ai entreprises pour rechercher dans quelle mesure l'effet dépendait de la nature du cylindre.

J'ai employé des cylindres de zinc, de cuivre rouge, de laiton, de stellite, de bois, et de fer recouvert d'une feuille de plomb. Les résultats ont été ce qu'on pouvait attendre dans l'hypothèse d'une influence de la dureté relative des deux surfaces en contact. C'est surtout au métal le plus mou qu'est dû l'effet observé et peu importe que ce métal constitue le cylindre ou le plan. L'effet est du même ordre de grandeur, par exemple, qu'il s'agisse d'un cylindre de fer roulant sur un plan de plomb ou d'un cylindre recouvert d'une feuille de plomb, roulant sur du fer.

7. — *Retour aux expériences sur les couteaux.* — Maintenant que les expériences avec les cylindres nous ont permis de préciser la forme de l'influence du support, nous pouvons

revenir aux couteaux. Retrouve-t-on avec les couteaux les faits obtenus avec les cylindres ? Nous savons déjà que même sur des plans durs, on observe avec les pendules à couteau une diminution de la durée quand l'amplitude diminue. Avec les plans de faible dureté l'effet est beaucoup plus considérable.

Les courbes $\Delta T = f(\theta_0)$ accusent encore une variation rapide aux petites amplitudes. Pour des plans de faible dureté ce sont encore nettement des hyperboles. Pour les plans durs, il est plus difficile de les caractériser à cause de la difficulté de l'observation aux très petites amplitudes, et de la petitesse de l'effet, mais, par analogie avec ce que nous trouvons pour les cylindres nous pouvons dire que la variation est de même forme qu'il s'agisse de plans durs ou de plans mous.

Je donne ici pour quelques substances, l'ordre de grandeur de la différence de durée entre les amplitudes 0 rad. 03 et 0 rad. 001 avec un pendule à couteau qui bat la seconde.

Plans de : Verre	$\frac{1}{100,000}$ sec.
— Fer	$\frac{2}{100,000}$ sec.
— Cuivre rouge	$\frac{2}{10,000}$ sec.
— Al	$\frac{1}{1,000}$ sec.
— Pb	$\frac{1}{100}$ sec.

Dans le cas du plomb, les empreintes laissées par le couteau sont de l'ordre de 0 mm. 05.

8. — *Décroissance des oscillations dans les expériences précédentes.* — Dans toutes les expériences précédentes, j'ai suivi, en même temps que la loi de la variation de durée, la loi de décroissance des arcs d'oscillation.

La technique est très simple : A intervalles réguliers, de

100 en 100 oscillations, par exemple, une photographie de l'amplitude est prise automatiquement, la plaque restant fixe. Les impressions successives se superposent sans que cela nuise à la netteté du cliché (fig. 18, pl. I).

Les images successives des bords, très nettes, sont pointées au $\frac{1}{100}$ mm.

Portons en ordonnées les distances $\Delta\theta_0$ de deux traits voisins et en abscisses l'amplitude moyenne correspondante, nous obtenons une courbe qui caractérise la façon dont l'amplitude décroît avec le temps.

Pour interpréter les résultats obtenus il était nécessaire de retrancher de l'effet total observé, l'influence de la résistance de l'air. Le pendule avait une forme géométrique simple de telle sorte qu'on pouvait calculer assez facilement la résistance opposée par l'air à son mouvement : j'ai fait porter au pendule, en différents points de la tige, des petites surfaces planes, très légères, disposées soit parallèlement, soit normalement, soit obliquement au sens du mouvement. De l'ensemble des résultats obtenus, j'ai pu déduire empiriquement les lois de la résistance de l'air dans les conditions spéciales de l'expérience et son effet sur le pendule.

Je ne puis ici approfondir ce point de mes recherches. Ce sera l'objet d'un mémoire ultérieur, mais je puis dire que le pendule est un instrument particulièrement sensible et commode pour des études sur la résistance des fluides. Je signalerai seulement les faits qui ont un rapport direct avec l'objet du présent travail :

1° Les courbes $\Delta\theta_0 = f(\theta_0)$ en ce qui concerne l'effet de l'air seul, ont une forme presque rectiligne, et légèrement concave vers le haut. Celles correspondant au frottement de roulement du cylindre ont une allure extrêmement différente ;

2° Il y a une concordance remarquable entre la vitesse de décroissance des arcs et la rapidité de variation de la durée

en fonction de l'amplitude. J'ai déjà signalé ce fait à propos de l'oscillation du cylindre sur des plans de plomb. Il est très général.

Les courbes qui suivent (fig. 19) traduisent quelques résultats. Elles donnent :

la courbe 1 : l'effet de l'air seul sur le pendule ;

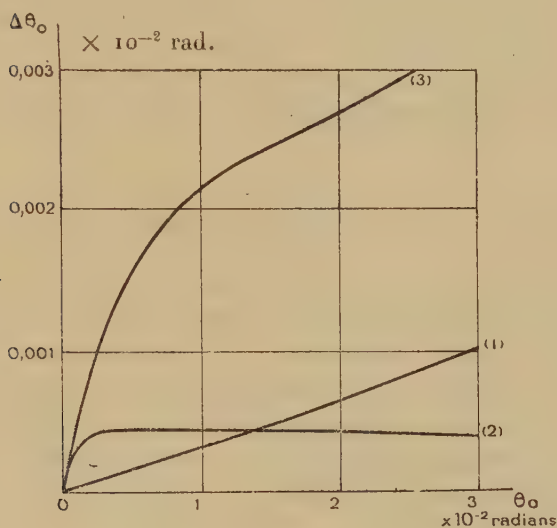


Fig. 19.

la courbe 2 : la résistance au roulement du cylindre d'acier de 7 mm. 5 de diamètre sur des plans de fer ;

la courbe 3 : la résistance au roulement du même cylindre sur des plans de plomb.

La courbe 2 montre que dans le cas de l'oscillation sur le fer, on peut admettre aux grands arcs, l'existence d'un frottement constant : la décroissance se fait en progression arithmétique. Mais cette hypothèse n'est plus valable aux petits arcs.

Les couteaux donnent des effets semblables, de même

forme, mais moins importants. C'est la résistance de l'air qui est la cause principale de la décroissance de l'amplitude, du pendule à couteau oscillant sur des plans durs.

Enfin, dans les cas de déformation permanente (courbe 3) on ne peut admettre l'existence d'une résistance au roulement, constante.

L'objet de ce mémoire étant d'étudier les variations à l'isochronisme produites par la suspension, j'arrêterai là ces remarques sur la décroissance des amplitudes.

Il me reste à examiner si l'on peut expliquer l'influence du support sur la durée d'oscillation.

VI. — Essai d'interprétation théorique.

1. — J'ai déjà dit que la théorie ordinaire du roulement avec frottement du cylindre sur le plan, ne permet pas de rendre compte des faits expérimentaux. — Résumons ces faits, communs aux cylindres et aux couteaux :

1^o La modification, apportée par le support sur la durée d'oscillation est nulle ou très petite quand le pendule oscille sous une très grande amplitude;

2^o Quand l'amplitude diminue, la durée d'oscillation décroît, la variation a une allure hyperbolique et on a :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{K}{\theta_0} \right);$$

3^o Cet effet du support dépend beaucoup de la nature du plan. — Il est inversement proportionnel à la distance du centre de gravité au cylindre ou au couteau. — Il augmente légèrement avec le rayon du cylindre; enfin il ne semble pas dépendre sensiblement du poids du pendule.

4^o D'autre part, on observe un fait remarquable : Que la déformation soit permanente, ou qu'au contraire, elle soit purement élastique (c'est-à-dire, qu'il soit impossible de découvrir des empreintes sur le plan), la variation garde la même forme.

La seule différence est qu'elle a une valeur plus considérable dans le cas d'une déformation permanente.

Cette similitude des effets observés dans deux cas où l'on s'attendrait à les trouver très différents est probablement en relation avec le fait qu'il est possible de concevoir deux explications distinctes de l'action mutuelle du support et du cylindre, conduisant toutes deux exactement au même résultat. L'une est purement géométrique et s'appliquerait plutôt au cas où il y a déformation permanente; l'autre est dynamique, elle suppose l'existence d'une force élastique exercée par le support et correspondrait au cas de substances très dures.

Nous allons examiner les deux hypothèses.

2. — *Hypothèse d'une perte de phase résultant de l'écrasement des deux surfaces en contact.* — Admettons que par suite de l'écrasement du cylindre sur son support, le contact se fasse par une petite surface, de largeur a mesurée perpendiculairement aux génératrices du cylindre. Que va-t-il en résulter pour la durée d'oscillation du pendule?

Il semble qu'on puisse admettre, que l'oscillation se fait alternativement autour de chacune des génératrices limitant la surface, et par suite, qu'au moment où le pendule passe par la verticale, le centre instantané de rotation se déplace brusquement, en sens inverse du mouvement du centre de gravité, de la quantité a , indépendante de l'amplitude.

Il en résulte à chaque oscillation, une perte de phase qu'il est facile de calculer. — En effet, si on reprend la représentation géométrique, on peut dire qu'au moment où le mobile est au point M (fig. 20), défini par $ON = \frac{a}{2h}$ (h étant la distance du centre de gravité au plan) il saute brusquement en M' symétrique par rapport à la position d'équilibre (A). La perte de phase, représentée, par période, par la somme des deux angles MOM' et M₁OM'₁ est :

$$4. \text{ arc sin } \frac{a}{2h\theta_0}$$

Si donc T_0 représente la durée de l'oscillation affranchie de l'action du support, on a la relation :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{2h\theta_0} \right)$$

Pratiquement, tant qu'il ne s'agit pas d'oscillations très petites, a étant petit par rapport à h , on pourra écrire :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{a}{\pi h\theta_0} \right)$$

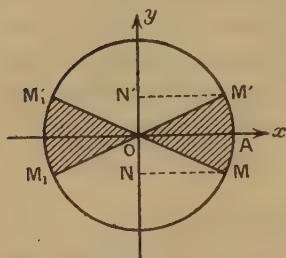


Fig. 20.

On voit que cette formule donne bien le sens et l'allure de la variation observée. Elle montre en outre que cette variation doit être inversement proportionnelle à h , comme

nous l'avons trouvé expérimentalement.

Largeur de la surface de contact. — Admettons la formule précédente, et calculons a ; nous trouvons, pour le cylindre d'acier de 7 mm. 5 de diamètre roulant sur plan de fer :

$$a = 0 \text{ mm. } 023$$

On pourrait se proposer de déterminer par le calcul la largeur de la surface de contact, mais les irrégularités du plan et du cylindre ne permettent pas de faire d'hypothèse simple et précise sur la forme de cette surface; par suite on ne peut demander au calcul, un contrôle satisfaisant.

Hertz ⁽¹⁾ a étudié théoriquement le contact d'une sphère sur un plan. Si on applique ses résultats en supposant que l'aire de contact ait la même valeur, qu'il s'agisse d'une sphère ou d'un cylindre, on trouve pour a un nombre qui est de l'ordre de grandeur de celui trouvé par l'expérience. Cet

⁽¹⁾ HERTZ (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92. 1882).

accord approché suffit pour montrer que l'hypothèse faite comme première interprétation théorique est admissible.

Un accord absolu entre cette hypothèse et l'expérience serait sans doute, plus accidentel que nécessaire. Elle donne en effet une image trop simple de ce que doit être le mouvement du cylindre : La perte de phase considérée ne doit pas se faire ainsi brusquement, et seulement au passage par la position d'équilibre. D'autre part, il est possible que la largeur de la surface de contact dépende de la vitesse du cylindre et par suite de l'amplitude.

On conçoit cependant clairement, surtout dans le cas où il y a une impression permanente que, de quelque façon que se produise la perte de phase au cours de l'oscillation, elle doit avoir une influence beaucoup plus sensible aux petits arcs d'oscillation qu'aux grands arcs.

Mais quand il s'agit du contact de deux corps parfaitement élastiques, il y a quelque difficulté à s'imaginer le mécanisme simple que nous venons d'exposer. On est alors amené à se demander si le support n'exerce pas une force élastique sur la suspension.

3. — *Hypothèse d'une force élastique du support.* — Quelle forme analytique doit avoir l'action du support pour produire la variation de la durée en fonction de l'amplitude observée expérimentalement ?

Dans la note I, je montre que si F est une fonction du temps correspondant à une petite cause perturbatrice agissant sur le pendule, de telle sorte qu'on puisse mettre l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = F,$$

cette cause perturbatrice produit une variation de période donnée par la formule :

$$\Delta T = \frac{1}{\theta_0 \omega^2} \int_0^T F \cos \omega t \, dt$$

La résultante verticale des actions élastiques du support est évidemment une force qui fait sensiblement équilibre au poids du pendule. Supposons-la appliquée à la distance δ du centre de rotation instantané. Si M est la masse du pendule, I son moment d'inertie, on aura :

$$F = -\frac{Mg\delta}{I} = -\omega^2 \cdot \frac{\delta}{h}$$

Comme l'expérience donne une variation de la forme : $\Delta T = -\frac{K}{\theta_0}$ où K est une constante, on est obligé de supposer que δ est une quantité constante, indépendante de l'amplitude.

Dans l'hypothèse du frottement de roulement ordinaire, on admet que la réaction normale du plan est constamment opposée au mouvement du pendule. Mais alors (note II) ΔT est nul ; il n'y a pas d'influence de ce frottement sur la durée.

Nous devons supposer au contraire que le moment de la réaction élastique du support change de sens (par δ) quand le pendule passe par sa position d'équilibre et que comme la pesanteur, l'action du support tend constamment à ramener le pendule à sa position d'équilibre.

A condition de concevoir qu'il n'y a pas roulement proprement dit, mais déformation élastique continuelle du métal, on peut s'imaginer une telle action : les parties déformées réagissant contre une déformation nouvelle quand le pendule s'écarte de sa position d'équilibre et, au contraire, aidant le retour vers cette position. La déformation se produirait à une distance moyenne du centre de rotation, indépendante de l'amplitude.

Admettons donc que δ soit constant et change de sens avec θ_0 . Nous avons alors :

$$\Delta T = -4 \cdot \frac{1}{\theta_0 h} \int_0^{\frac{T}{4}} \delta \cos \omega t dt$$

$$\Delta T = -\frac{4\delta}{\theta_0 h \omega} \quad ; \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{2\delta}{\pi h \theta_0}$$

On peut admettre que 2δ est de l'ordre de grandeur de la largeur de la surface de contact entre le cylindre et le plan et prendre $2\delta = a$.

$$\frac{\Delta T}{T} = - \frac{a}{\pi h \theta_0}$$

Nous arrivons à la même expression exactement, que dans le cas de la première hypothèse. C'est une coïncidence dont la conséquence est qu'aucune expérience ne peut permettre de choisir entre les deux interprétations.

L'observation, au microscope, du roulement du cylindre sur des plans de faible dureté, montre que la perte de phase qui constitue la première hypothèse, a bien lieu réellement. Il est probable que la première interprétation convient surtout au cas où il y a déformation permanente, et que la deuxième s'applique au cas de substances dures et parfaitement élastiques, mais en réalité les deux effets doivent, dans tous les cas, se superposer et d'une façon qu'il est impossible de déterminer expérimentalement.

Quelle que soit la part respective qu'on doive attribuer aux deux interprétations précédentes dans l'explication des faits, toutes deux montrent que l'importance de l'action du support est en raison directe de la largeur de la surface de contact. Cette dernière présente une certaine indétermination par suite des circonstances variables dont dépend la longueur suivant laquelle les surfaces se touchent (degré de poli des surfaces, flexion du plan et de la suspension avant et après la mise en place du pendule).

De cette indétermination résultent les anomalies observées et la difficulté de préciser les lois concernant l'influence du rayon du cylindre et du poids du pendule.

Il est cependant possible d'atteindre l'ordre de grandeur de la largeur de contact à l'aide de la formule précédente. Nous avons trouvé 0 mm. 02 pour le cylindre de 7 mm. 5 roulant sur du fer, et indiqué qu'il n'y avait pas contradiction avec la théorie de Hertz.

Pour les couteaux, même bien travaillés (comme celui du pendule de Kater dans les expériences de Sabine) on peut trouver des variations d'isochronisme de l'ordre de $\frac{1}{100.000}$ sec. entre les amplitudes 0,03 et 0,01 radian ; cela correspond à un écrasement de l'ordre de 0 μ 4. Une détermination directe de cet écrasement, en vue de la correction à effectuer, serait impossible (1).

VII. — Résumé des résultats précédents.

1. — Le roulement d'un cylindre ou d'un couteau sur son plan de suspension est accompagné de variations dans la durée des oscillations, non prévues par la théorie ordinaire.

2. — Il n'y a pas de différence essentielle, en ce qui concerne la forme de la variation entre l'action des plans de grande dureté et des plans relativement mous. Cette variation est considérable dans le cas de cylindres, même roulant sur des plans très durs. Dans le cas des couteaux elle est beaucoup moindre, mais il est logique d'étendre à ce cas les conclusions obtenues avec les cylindres, en sorte que l'étude du roulement des cylindres a permis de préciser l'action du support sur le pendule à couteau.

(1) Le mouvement du couteau ou du cylindre doit être très complexe, et dans ce qui précède je n'ai pas essayé d'en faire une analyse complète. J'ai cherché seulement quelles hypothèses pouvaient rendre compte des variations d'isochronisme. Il est possible, comme l'indique M. BRILLOUIN (*Ann. de Ch. et de Phys.*, 7^e série, 13, 1898), qu'il y ait en outre un effet de déformation élastique dû à la réaction tangentielle, entraînant ensemble la suspension et le plan, horizontalement. Cet effet, proportionnel à l'amplitude ne troublerait pas l'isochronisme, mais, superposé au glissement dont nous avons reconnu l'existence surtout aux grandes amplitudes (pour les cylindres), il permettrait d'expliquer assez bien la loi relativement complexe de décroissance des arcs, observée expérimentalement.

3. — Il ne s'agit pas de l'influence sur le mouvement d'une figure déterminée et rigide de l'arête ; l'effet est dû à la déformation mutuelle du couteau et du plan (déformation élastique ou permanente).

4. — Les quelques auteurs qui ont signalé des anomalies de ce genre dans les observations du pendule ont corrigé empiriquement la durée des grandes oscillations. L'expérience nous montre qu'au contraire ces dernières sont soustraites à l'action du support et que la correction doit porter sur les petites oscillations.

Cette correction ne peut être prévue *a priori* ; elle dépend d'ailleurs de la façon très irrégulière dont se fait le contact entre le couteau et le plan, et c'est là une difficulté de plus dans l'emploi du pendule (avec réversion et échange des couteaux) pour les mesures absolues de la pesanteur.

Pour reconnaître l'existence de cette cause d'erreur et l'éliminer, il est indispensable, par l'emploi d'une méthode précise et rapide comme la méthode photographique, de suivre exactement les variations de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude. Les considérations par lesquelles nous avons établi l'existence d'une « durée vraie » affranchie du support permettent d'effectuer cette correction.

5. — Les variations de la durée d'oscillation avec l'amplitude, d'un pendule à cylindre sont en relation étroite avec la dureté du support.

Leur étude conduit à une mesure directe de la dureté (en rapport avec la largeur de la surface de contact du cylindre et du plan) et cela qu'il y ait eu ou non déformation permanente.

Enfin, l'étude de l'écrouissage et des modifications de certaines propriétés élastiques des métaux, se présente comme pouvant être particulièrement simple par une telle méthode.

CHAPITRE III

ETUDE EXPÉRIMENTALE DU MOUVEMENT DU PENDULE LIBRE SUSPENDU PAR UNE LAME ÉLASTIQUE

I. — Introduction.

La suspension à ressort. — Son emploi soulève différents problèmes. — La suspension à ressort a remplacé actuellement dans toutes les horloges, la suspension à soie ou à couteau. Elle possède en effet une qualité importante : elle reste fixe et identique à elle-même, de sorte que le pendule semble devoir osciller dans des conditions toujours très bien déterminées et constantes, ce qui est essentiel dans son emploi pour la mesure du temps. Nous discuterons en détail cette qualité de permanence.

Mais la lame élastique influence évidemment le mouvement du pendule, et divers problèmes sont à résoudre :

D'abord la lame se déforme et ses déformations pendant l'oscillation peuvent faire que le pendule s'écarte sensiblement de sa définition théorique et n'oscille plus autour d'un axe fixe.

Cette question a une certaine importance car, d'une part, dans les régulateurs des horloges, on s'efforce de placer l'axe de rotation de l'ancre d'échappement à la hauteur du centre de flexion. D'autre part, c'est l'incertitude sur la position exacte de ce point qui a fait rejeter l'emploi du pendule à ressort pour les déterminations de l'intensité de la pesanteur.

Un autre problème est de déterminer de quelle façon les forces élastiques éveillées par la déformation, en s'ajoutant

à la force motrice ordinaire du pendule, peuvent troubler son mouvement au point de vue de l'isochronisme des oscillations.

Enfin, le frottement intérieur de la lame intervient comme résistance au mouvement du pendule et il y a lieu de dégager l'influence du ressort, de celle de la résistance de l'air dans l'amortissement de l'amplitude. Ce problème a de l'intérêt au point de vue de l'entretien du régulateur des horloges ⁽¹⁾.

Il est indispensable, pour arriver à des conclusions présentant quelque certitude sur l'influence de la lame dans le mouvement du pendule, de faire à la fois une étude expérimentale et une étude théorique, et de comparer ensuite ces deux études aussi rigoureusement que possible. C'est là l'objet de ce nouveau chapitre.

II. — Travaux antérieurs.

1. — Les expériences antérieures, sur l'influence du ressort de suspension sont peu nombreuses et les traités classiques d'horlogerie ne donnent que très peu de renseignements sur ce sujet. On peut s'en étonner à juste titre si l'on considère l'importance, *a priori*, que doit avoir le ressort dans le mouvement du régulateur.

D'autre part, il y a quelques travaux théoriques ; mais les recherches expérimentales et les calculs sont faits par des auteurs différents, de telle sorte que les essais de liaison entre ces deux séries d'études ont toujours été insuffisants.

(1) Conformément à l'objet du présent mémoire, je n'exposerai que les expériences et conclusions concernant le deuxième problème ; les variations à l'isochronisme. Les résultats concernant le centre d'oscillation et la décroissance des arcs seront publiés ultérieurement. Je ne donnerai ici que quelques indications sur ces deux points.

La suspension élastique du pendule a été étudiée presque uniquement jusqu'ici, comme moyen de parvenir à l'isochronisme des oscillations du pendule, problème qui semble de tout temps avoir beaucoup préoccupé les horlogers.

Urbain Jürgensen ⁽¹⁾ émet le premier cette idée en constatant que l'énergie du ressort produit une accélération de la vitesse du pendule aux grands arcs d'oscillation, susceptible de compenser le retard dû à l'erreur circulaire.

L'idée est émise également par Pierre Leroy, Ferdinand Berthoud, mais sans base expérimentale.

Les premières recherches systématiques sont dues à Frodsham ⁽²⁾ qui étudie avec un fil de soie et des ressorts variés l'amortissement du pendule sans entretien et sa marche avec entretien. Il arrive à une conception analogue à celle de Jürgensen et propose de réaliser l'isochronisme par l'emploi d'une lame de laiton rigide, ajustée au sommet du pendule et serrant le ressort de suspension de telle sorte qu'on puisse à volonté faire varier la longueur du ressort sans altérer la période du pendule ⁽³⁾.

C'est encore à la même conclusion qu'arrivent Laugier et Winnerl ⁽⁴⁾. Voici le résumé de leurs résultats :

1^o En suspendant un pendule de 2 k. battant la seconde, à deux lames de 5 mm. de largeur, 1 mm. de longueur, 0 mm. 24 d'épaisseur et écartées de 2 cm., ils trouvent que pour une amplitude de 5^o les oscillations ont une durée plus petite que pour 1^o. La différence qui est de l'ordre

⁽¹⁾ *Astr. Nachr.*, 1823, n^o 49.

⁽²⁾ FRODSHAM. *Proceedings of the Royal Society of London*, t. IV, p. 78.

⁽³⁾ FRODSHAM. *Results of experiments on the vibration of pendulums with different suspending springs* (*Silliman's Journal*, t. XXXVII, 1839, p. 648).

⁽⁴⁾ LAUGIER et WINNERL. *Sur l'influence du ressort de suspension sur la durée des oscillations du pendule*. *C. R.*, t. XXI, 1845, p. 117.

de $\frac{1}{1000}$ de seconde s'atténue quand on augmente le poids du pendule.

2^o Avec le même pendule et des ressorts de même largeur, de même épaisseur, mais de 3 mm. de longueur, les oscillations sont sensiblement isochrones aux diverses amplitudes.

Cette étude expérimentale est accompagnée de quelques réflexions théoriques destinées à expliquer l'action de la suspension.

D'après les auteurs, la « flexion » du ressort et sa « résistance » sont les deux effets, augmentant avec l'amplitude, qui tendent à diminuer la durée des oscillations.

Ces considérations à priori, sont sans valeur : Nous montrerons, par une analyse précise de la question, que l'effet observé de la lame sur le pendule, ne peut être expliqué à partir de la théorie élémentaire de la flexion.

Les conclusions de Laugier et Winnerl ont été et sont encore, en partie, acceptées par les horlogers français qui font, plutôt, des suspensions courtes et épaisses.

En dehors de ces recherches expérimentales — qui sont les seules sur la question, à ma connaissance — quelques auteurs ont étudié le problème théorique.

Bessel (¹), intéressé par les résultats de Frodsham fait la théorie du pendule suspendu à un ressort. Il trouve que le ressort diminue d'autant plus la longueur du pendule simple synchrone, que l'amplitude est plus grande, mais que cette variation avec l'amplitude est toujours insensible et qu'elle ne peut, en aucun cas, compenser la variation inverse due au mouvement circulaire du pendule.

La théorie de Bessel ne vérifie donc pas les résultats de Frodsham et d'après son auteur, elle autorise l'hypothèse que des influences étrangères doivent avoir, pendant les expériences, modifié la durée d'oscillation du pendule.

(¹) BESSEL. *Astr. Nachr.* 1843, t. XX, p. 158.

J'exposerai plus loin une théorie différente de celle de Bessel et plus générale, et j'arriverai à la même conclusion relative à la nécessité d'une hypothèse complémentaire, mais cette hypothèse sera toute différente de celle de Bessel et atteindra les bases mêmes de la théorie.

Je ne ferai que signaler quelques travaux ultérieurs, de moindre importance d'ailleurs que celui de Bessel :

Résal ⁽¹⁾ démontre que dans le cas où l'amplitude est très petite, et où la longueur de la lame est petite par rapport à celle du pendule, les oscillations sont isochrones.

Isely ⁽²⁾ tente d'expliquer les résultats de Laugier et Winnerl. Il montre que dans quelques cas on peut arriver à l'isochronisme des oscillations sans hypothèse spéciale (ce qui contredit le résultat de Bessel), mais les explications de Laugier et Winnerl ne lui semblent pas satisfaisantes et il croit que l'effet utile pour amener l'isochronisme est dû à l'augmentation, pendant le mouvement, du bras de levier sur lequel agit la force élastique du ressort. Les approximations et les conclusions d'Isely ne me paraissent d'ailleurs pas justifiées.

Signalons enfin une étude de R.-A. Sampson ⁽³⁾ sur l'influence du ressort dans le mouvement du régulateur des horloges, et un travail de M. Keelhoff ⁽⁴⁾ portant sur la détermination théorique du centre de flexion et sur le choix d'une bonne suspension.

2. — *Le problème de l'isochronisme.* — Le rapide historique que nous venons de lire montre que les recherches n'ont été faites jusqu'ici, que pour déterminer s'il était possi-

(1) RÉSAL. *Recherches sur la loi d'oscillation du pendule à suspension à lames* (C. R., 1856, t. XLII, p. 390).

(2) ISELY. *Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel*, 1859-1861, p. 648.

(3) R.-A. SAMPSON. *Studies in Cloks and Time Keeping. Proceedings of the R. S. of Edinburgh* V, t. XXVIII, part. I.

(4) KEELHOFF. *La suspension à ressort. Journal Suisse d'horlogerie*, n° 12, juin 1905.

ble de réaliser l'isochronisme par la suspension à ressort. Les expériences de Laugier et Winnerl avaient été entreprises sur le conseil de Bessel qui considérait que ce problème de l'isochronisme était le plus important de l'horlogerie. Et c'est là l'opinion de la plupart des horlogers. Wagner écrit par exemple dans son « Mémoire sur le Pendule » : « C'est une des plus grandes plaies de l'horlogerie que ce défaut d'isochronisme et bien des tentatives ont été faites pour y remédier ».

Mais quelle que soit la solution adoptée : courbes cycloïdales d'Huyghens, action de la lame de suspension, action de ressorts agissant sur la tige du pendule, etc..., elle est évidemment insuffisante si elle ne concerne que l'erreur circulaire. Le véritable problème de l'isochronisme consiste en effet à compenser, pour toutes les amplitudes, tous les effets perturbateurs qui peuvent agir sur le régulateur : erreur circulaire, effet de la suspension, action variable de l'échappement, épaissement des huiles, effet de la pression atmosphérique, effets de la température, etc... C'est là, avec les horloges actuelles, un problème impossible, aussi Robert, dans ses « *Etudes sur diverses questions d'horlogerie* » écrit-il que l'obtention de l'isochronisme par la suspension (compensation de l'erreur circulaire seule) serait plus nuisible qu'utile.

Nous montrerons d'ailleurs plus loin que cette compensation entre l'erreur circulaire et l'effet de la lame n'est pas possible d'une façon absolue.

Mais ce n'est pas à ce point de vue que j'ai entrepris cette étude. Mon but a été de déterminer l'effet perturbateur de la lame, de chercher à quelles lois cet effet obéissait en vue d'arriver à une connaissance aussi complète que possible du pendule libre considéré comme instrument de mesure du temps. C'est d'ailleurs par une connaissance de plus en plus précise des différents effets perturbateurs, qu'on pourra arriver un jour, soit à en tenir compte, soit à les éliminer isolément, soit à les compenser rigoureusement l'un par l'autre. Pour le

moment, la compensation ne peut qu'être l'effet du hasard et la conséquence de tâtonnements sans intérêt.

II. — Etude expérimentale du mouvement du pendule libre suspendu à une lame élastique aux petites amplitudes

1. — Je ne décrirai pas en détail les diverses suspensions à lames ; on en trouve des descriptions dans les traités d'horlogerie (suspensions Brocot, Robert, Vallet, etc...).

Dans les suspensions des pendules astronomiques, on emploie deux lames pour éviter le mouvement de torsion ; elles sont serrées entre deux plaques de laiton doublées intérieurement de plaques d'acier, à l'aide de goupilles ou de vis.

Les deux plaques inférieures portent une cheville à laquelle on accroche la tige du balancier. De même une forte cheville traversant les plaques supérieures en leur milieu, sert à suspendre le système dans une gouttière que porte le support du pendule. On ne serre les vis qui fixent définitivement l'ensemble de la suspension que quand le système a pris sa position d'équilibre sous l'effet du poids du pendule.

Les lames sont en acier trempé ; elles doivent être toutes deux de même force et de même élasticité. Leurs dimensions varient selon les constructeurs horlogers. La longueur est de 2 ou 3 mm. (horloges Winnerl, Riefler, Leroy) à plusieurs centimètres (horloges anglaises) ; la largeur est de 5 mm. à 1 cm. et l'épaisseur de l'ordre de 0 mm. 1 à 0 mm. 2.

Pour mes expériences, je me suis servi de suspensions à lame unique. Il est en effet assez délicat d'ajuster les deux lames de façon qu'elles agissent toutes deux exactement de la même façon : les résultats avec les suspensions à lame unique devaient *a priori* présenter plus de certitude.

2. — *Caractères du mouvement du pendule aux petites amplitudes.* — Dans la note III, se trouve étudié le mouve-

ment du pendule à suspension élastique, dans l'hypothèse de très petits arcs d'oscillations, et en admettant la loi élémentaire de la flexion pour déterminer l'action du ressort.

Le résultat est le suivant : le mouvement du pendule est perturbé par une vibration rapide au début, mais très vite cette vibration disparaît, et quelles que soient les conditions dans lesquelles on a lancé le pendule, il prend une oscillation harmonique et telle que l'axe du pendule passe constamment par un point fixe (*centre de flexion*).

La lame agit de deux façons : d'une part, elle se déforme pendant le mouvement et raccourcit la longueur du pendule d'une quantité constante, indépendante de l'amplitude ; d'autre part, elle ajoute son action motrice (proportionnelle à l'angle d'écart) à celle de la pesanteur.

Les oscillations de très petite amplitude sont isochrones.

3. — *Vérifications expérimentales.* — Je me suis proposé une vérification expérimentale, au moins approchée, des formules obtenues dans la note III, concernant la durée de l'oscillation infiniment petite et la position du centre de flexion.

Lame. — M. Borrel, habile constructeur horloger, a eu l'obligeance de me construire une suspension d'après un de ses modèles courants. La lame est en acier trempé. Ses dimensions sont les suivantes :

Longueur	2 cm. 52
Largeur	2 cm. 10
Épaisseur	0 mm. 20

Pendule. — Le pendule a une forme géométrique de façon que son moment d'inertie soit facilement calculable. Il est formé d'une tige de fer de section rectangulaire dans laquelle peut glisser exactement une masse parallélipédique de fer.

Poids du pendule.	2 193 gr.
Moment d'inertie par rapport au point d'encastrement inférieur de la lame .	12.893 000 C.G.S.
Distance du centre de gravité à la lame.	70 cm. 16

Nous prenons comme module d'Young de l'acier dont est constituée la lame :

$$E = 2,0 \cdot 10^{12} \text{ C. G. S.}$$

on en déduit :

$$\mu = 28,0 \cdot 10^5 \text{ et } \omega = 0,8765 \text{ (voir les formules, note III)}$$

Résultats : Durée d'oscillation. — Si on calcule alors la durée d'oscillation, on trouve :

$$T = 1 \text{ sec. } 847.$$

L'observation donne (aux petites amplitudes) 1 sec. 850.

Si le même pendule était suspendu à un fil sans force élastique, de même longueur, sa durée d'oscillation serait 1 sec. 864.

Les deux effets (courbure de la lame et réaction élastique) qui diminuent la durée d'oscillation sont ici du même ordre de grandeur.

Centre de flexion. — On peut constater l'existence du centre de flexion en fixant sur la tige du pendule qu'il prolonge, un index fin (fil de verre par exemple) bien rectiligne et vertical de telle façon qu'au repos, il soit exactement dans le plan de la lame de suspension. A l'aide d'un microscope à micromètre, on vise exactement le point du fil qui semble rester immobile pendant l'oscillation et on détermine sa position. Il faut tenir compte du mouvement du support, proportionnel à l'amplitude qui a comme effet d'élever légèrement cette position. Pratiquement ce point ne dépend pas de l'amplitude. Dans quelques cas particuliers cependant (lames longues, pendule de très faible masse) on met en évidence de faibles déplacements de ce point pendant le mouvement.

Les formules de la note III (9) (15) permettent le calcul exact de la position du centre de flexion. Il est d'autant plus éloigné de l'encastrement inférieur, que le poids du pendule est plus grand et que la raideur de la lame est plus faible.

L'expérience vérifie entièrement la théorie. Dans le cas particulier de l'expérience dont nous nous occupons, on trouve par le calcul pour la distance du centre de flexion au point d'encastrement inférieur : $\lambda = 1 \text{ cm. } 51$ et l'observation donne : $\lambda = 1 \text{ cm. } 52$.

Le centre de flexion est toujours au-dessus du milieu de la lame, ce qui contredit l'affirmation de Résal (*Mécanique générale*) : « Tout se passe comme si le pendule tournait effectivement autour d'un axe projeté au milieu de la lame. »

Dans ce qui suit, nous ne reviendrons pas sur la question du centre de flexion ; à cause de son importance en horlogerie, elle fera l'objet d'une étude ultérieure.

En définitive, on constate, en ce qui concerne le mouvement du pendule aux petites amplitudes, un accord très satisfaisant entre le calcul et l'expérience, si l'on considère :

1° d'une part que dans le calcul, la masse de la lame est négligée ;

2° d'autre part qu'il y a une grande incertitude sur la valeur exacte du coefficient E.

4. — *Amortissement des oscillations.* — Je ne donnerai à ce sujet, comme dans le cas du pendule à couteau, que les résultats généraux ; ils ne concernent que le pendule à seconde :

1° Le décrement, dû au frottement intérieur du métal, c'est-à-dire obtenu en retranchant l'effet de la résistance de l'air de l'amortissement total, n'est constant que pour les petits arcs d'oscillation. Au delà d'une certaine amplitude qui dépend de la rigidité de la lame, il croît très sensiblement.

2° On vérifie de façon satisfaisante la loi suivante ; la perte d'énergie $\Delta\mathfrak{E}$ par période est proportionnelle au travail $\mathfrak{E}$ de déformation de lame :

$$\Delta\mathfrak{E} = K\mathfrak{E}.$$

Le calcul de l'amortissement dans cette hypothèse est fait à

la fin de la note III ; la formule obtenue permet de calculer la constante K. Avec les lames d'acier utilisées on trouve comme valeur moyenne :

$$K = 0,015.$$

5. — Ces premières considérations n'avaient pour but que de montrer une concordance suffisamment exacte entre la théorie de première approximation (amplitudes infiniment petites) et l'expérience.

Je me suis proposé, surtout, comme application indiquée de la méthode photographique, une étude des variations à la loi d'isochronisme produites par la lame de suspension du pendule.

III. — Etude des variations de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude (Suspensions ordinaires)

1. — Le problème est le même que pour le pendule à cylindre : la durée d'oscillation T du pendule théorique est fonction de l'amplitude θ_0 et on a :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

Quelle est la loi de variation du pendule à ressort ; s'écarte-t-elle sensiblement de la précédente ?

La réponse à cette question est donnée à la fin de la note IV, dans laquelle j'ai calculé le mouvement du pendule en ne négligeant que les termes de l'ordre de θ_0^4 .

A l'expression ordinaire $\frac{\theta_0^2}{16} T$ s'ajoute une correction *toujours petite*. Dans le cas de l'exemple considéré plus haut cette correction supplémentaire serait de l'ordre de $\frac{\theta_0^2}{2.000} T$.

Donc, *théoriquement le pendule à suspension élastique ne devrait pas s'écarter sensiblement plus de la loi d'isochronisme que le pendule à couteau*. Il résulte de là, que les explications de Laugier et Winnerl et les conclusions d'Isely

ne sont pas conformes à une théorie précise du mouvement du pendule à ressort. Le résultat que nous venons d'indiquer est le même que celui auquel est arrivé Bessel, mais cet auteur s'est limité à un cas particulier (lame courte). La conclusion précédente est générale.

Nous allons voir si l'expérience confirme ce résultat de la théorie.

2. — *Première expérience. Les variations à l'isochronisme produites par une suspension à lame, ordinaire.* — C'est la lame et le pendule précédemment décrits qui ont été utilisés dans cette première expérience.

Je rappelle qu'il s'agit d'un pendule de 2 k. environ, suspendu à une lame de 2 cm. 52 de longueur et de 0,2 mm. d'épaisseur.

Le principe de l'expérience est exactement le même que celui qui a été appliqué aux expériences avec les cylindres et les couteaux.

Le pendule de comparaison oscille entre des limites constantes d'amplitude. C'est un pendule à couteau, dont les variations à l'isochronisme sont faibles et d'ailleurs connues. Sa durée d'oscillation moyenne est $T' = 1 \text{ sec. } 85$.

Le pendule à suspension élastique oscille librement et on détermine la durée de sa période en fonction de celle du premier pendule, à divers états de son mouvement, par la méthode photographique. Les nombres obtenus sont ensuite corrigés de l'influence retardatrice des grands arcs (erreur circulaire) par la formule ordinaire, ou (quand cela est nécessaire) à l'aide des formules trouvées à la fin de la note IV.

Je transcris le tableau des résultats de cette première expérience.

Amplitude en radians	Correction	Durée observée	Durée corrigée
0,0774	374 10^{-6} T'	0,998753 T'	0,998379 T'
0,0605	229	0,998728	0,998499
0,0421	111	0,998728	0,998617
0,0325	66	0,998750	0,998684
0,0247	38	0,998777	0,998739
0,0188	22	0,998789	0,998767
0,0151	14	0,998778	0,998764
0,0082	4	0,998701	0,998697
0,0042	1	0,998666	0,998665

Les courbes ci-dessous (1) donnent (fig. 21) :

- (1) La variation de la durée corrigée de l'erreur circulaire ;
- (2) La variation de la durée non corrigée ;
- (3) La correction d'amplitude ordinaire.

La durée d'oscillation corrigée commence par croître, quand l'amplitude augmente, passe par un maximum, pour une amplitude d'environ 0,02, puis décroît ensuite régulièrement.

Nous voyons par ce premier exemple, que *le résultat de l'expérience n'est pas conforme à la théorie*. On obtient une variation très sensible de la durée d'oscillation corrigée, en fonction de l'amplitude.

Le tableau précédent donne les moyennes d'un certain nombre d'expériences toutes très concordantes. Mais n'y a-t-il pas d'erreur expérimentale possible ? Une cause d'erreur pouvait être envisagée. Beaucoup plus qu'un couteau, une lame élastique est solidaire du support du pendule ; il s'en suit que les mouvements du support peuvent être importants et avoir une grande influence sur la marche du pendule.

(1) Dans ces courbes les variations sont prises par rapport à la durée de l'oscillation infiniment petite, supposée (par extrapolation) égale à 0,993630 T.

En faisant osciller sous la même amplitude, mais en opposition de phase, un deuxième pendule identique au premier, je supprimais tout mouvement du support; le résultat n'a pas changé.

J'ai d'ailleurs constaté par une observation au microscope micrométrique que les déplacements du support (qui ne dépassaient pas $\frac{1}{100}$ mm.) étaient proportionnels à l'ampli-

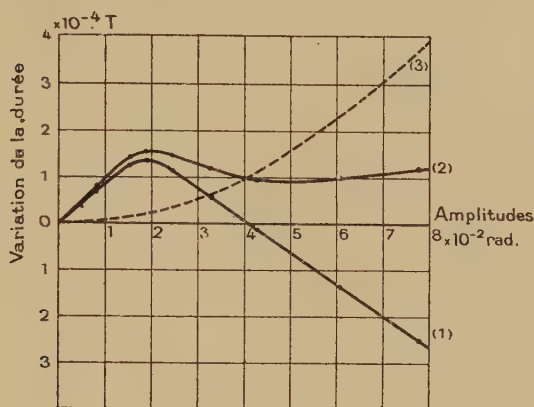


Fig. 21.

tude : ils ne doivent donc produire aucune perturbation dans l'isochronisme.

Les expériences ont été reprises en changeant le support du pendule. Le premier était un support massif de bois avec trois fortes poutres verticales, le nouveau est en fonte, très lourd et certainement plus stable que le premier. Le porte-lame est encastré de la même façon dans les deux cas. Le résultat a été identique à celui de la première expérience.

D'autre part, j'ai modifié à plusieurs reprises le mode d'encastrement du porte-lame supérieur et le mode d'attache du pendule à la lame. Je ne crois pas utile de donner le détail de ces opérations, qui avaient pour but de supprimer toute incertitude sur l'influence perturbatrice d'un mauvais

ajustement des différentes parties de la suspension, car les résultats ont été exactement les mêmes dans tous ces nouveaux essais. Quelques-uns des changements avaient pour conséquence de faire un peu varier le rapport des durées d'oscillation des deux pendules, mais les variations d'isochronisme ont toujours été les mêmes.

Il semble donc permis d'attribuer l'effet constaté à l'influence de la lame sur le mouvement du pendule.

Tirons quelques conclusions de l'examen de la première courbe. Les expériences de Laugier et Winnerl avaient, nous l'avons dit, mis en évidence une accélération de la vitesse du pendule aux grands arcs d'oscillation. Ce fait apparaît très nettement dans notre première expérience. La durée corrigée correspondant à l'amplitude de 0 rad. 08 est d'environ 0,0003 sec. plus petite que celle qui correspond aux amplitudes infiniment petites. Dans la région où la courbe décroît régulièrement, la variation de la durée d'oscillation simple rapportée au radian est de 0.0061 sec. environ.

Un fait nouveau, est l'accroissement de durée pour les petits arcs, à partir de l'amplitude infiniment petite jusqu'à un maximum, pour l'amplitude de 0 rad. 02.

En possession de ce premier résultat, discutons l'opinion des auteurs qui pensaient pouvoir obtenir l'isochronisme par l'emploi d'une lame de dimensions convenables, pour un pendule de poids donné.

Précisément dans l'expérience actuelle, il y a une sorte de compensation et les oscillations sont grossièrement isochrones entre 0 rad. 01 et 0 rad. 08, mais cet isochronisme n'est pas absolu et c'est là un résultat général. Les deux effets qui devraient se compenser aux grandes amplitudes, n'ont pas même loi de variation ; *il ne peut y avoir de compensation rigoureuse.*

Cependant la réalisation d'un isochronisme approché est possible. Nous avons dit que cela n'était peut-être pas très utile. Mais dans les cas où l'échappement laisse beaucoup de

liberté au pendule, on peut avoir intérêt à se placer dans les meilleures conditions d'isochronisme. Une étude analogue à celle que nous venons de faire est alors utile pour déterminer dans quelles conditions on doit faire osciller le pendule.

Dans l'exemple précédent, il faudrait utiliser le pendule sous l'amplitude qui correspond, soit au maximum, soit au minimum de la courbe (2) (0 rad. 02 ou 0 rad. 05).

Remarque. — Les petites variations de température (observées d'une expérience à l'autre) ne modifient pas l'effet que produit la lame.

3. — *Influence de l'épaisseur de la lame.* — a) La lame précédente a une épaisseur relativement grande par rapport au poids du pendule auquel elle est suspendue. Cherchons ce que donne une lame d'acier d'épaisseur moitié moindre.

Elle a exactement la même longueur et la même largeur que la précédente. *Son épaisseur est de 0 mm. 1.*

Le tableau suivant résume l'expérience :

Amplitude	Correct. d'amplitude	Durée corrigée
0,0685	294 10^{-6} T'	0,997345T'
0,0574	236	0,997370
0,0472	139	0,997391
0,0356	79	0,997421
0,0240	36	0,997444
0,0218	30	0,997432
0,0105	18	0,997411
0,0031	0	0,997400

On voit encore ici une augmentation initiale de durée à partir des très petits arcs jusqu'à un maximum net, puis une décroissance.

Cette décroissance correspond à peu près à 0 sec. 0023 par radian ; elle est donc moindre que dans l'expérience précédente. On voit que le maximum de durée a lieu pour une

valeur de l'amplitude du même ordre de grandeur qu'avec la lame plus épaisse.

b) Avec une lame de 0 mm. 03 d'épaisseur, on trouve une décroissance moyenne de 0,0008 par radian ; soit une différence d'environ 40.10^{-6} entre les grandes amplitudes (0 rad. 06) et les petites (0 rad. 01). La courbe a même allure que les précédentes mais le maximum est moins accusé. La correction d'amplitude doit être faite avec soin, car elle dépasse de beaucoup la variation d'isochronisme due à la lame.

c) Prenons maintenant une lame plus épaisse que la première, de même longueur et de même largeur.

Lame de 0 mm. 38 d'épaisseur. — On trouve :

Amplitude	Correct. d'amplitude	Durée corrigée
0,1518 rad.	1440 10^{-6} T'	0,995355 T'
0,0893	498	0,996146
0,0589	217	0,996411
0,0312	62	0,996832
0,0268	48	0,996976
0,0214	28	0,997115
0,0165	16	0,997043
0,0074	3	0,996802
0,0029	1	0,996773

Jusqu'à la très grande amplitude de 0 rad. 15, on voit que la diminution de durée est rapide et régulière, le taux moyen de variation étant 0,012 sec. par radian. Le maximum de la durée d'oscillation a lieu encore pour 0 rad. 02 environ.

Ici l'effet d'accélération aux grands arcs est à peu près double de celui observé avec la lame de 0 mm. 2.

Il est difficile de formuler une loi reliant l'effet de la lame à son épaisseur car, d'une part, dans les différentes expériences on a affaire à des lames différentes, par suite, à des

aciers différents ; d'autre part, on ne peut aisément comparer des courbes telles que celles que nous avons obtenues.

Si on les compare par le taux moyen de décroissance aux grands arcs (partie la plus nette de l'effet observé) on peut seulement dire *que la variation augmente en même temps que l'épaisseur de la lame.*

Epaisseur de la lame	Variation moyenne de durée par radian
—	—
0,03 mm.	0,0008
0,10	0,002
0,20	0,006
0,38	0,012

6. — *Influence de la longueur de la lame.* — J'ai choisi, pour déterminer cette influence, une lame relativement très épaisse et un pendule léger de façon que les variations fussent aussi nettes que possible. La lame a 2 cm. de largeur et 0 mm. 46 d'épaisseur, le pendule ne pèse que 1 kg. 200.

Dans les expériences qui suivent, j'ai chaque fois ajusté la lentille de façon que le pendule batte sensiblement la seconde.

1° J'ai fait varier la longueur de 28 cm. 8 à 0 cm. 61. Avec ce pendule léger il ne m'a pas été possible de diminuer davantage la longueur de la lame ; déjà avec cette dernière longueur, l'amortissement dû surtout à la résistance de la lame est tellement grand que l'observation devient difficile. Ce cas est un de ceux que j'ai signalés dans lesquels l'application de la méthode des coïncidences n'est pas possible.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

(h est la distance du centre de gravité à la lame).

a) Longueur de 28 cm. 8 $h = 60 \text{ cm. } 2$		
Amplitude	Correction	Durée corrigée
0,1368	1169 10^{-6} T'	0,995563 T'
0,1035	669	0,995884
0,0693	300	0,996141
0,0517	167	0,996274
0,0314	62	0,996341
0,0120	9	0,996340
0,0055	2	0,996314
0,0021	0	0,996304
b) Longueur de 8 cm. 36 $h = 81 \text{ cm.}$		
Amplitude	Correction	Durée
0,1458	1329 10^{-6} T'	0,996177 T'
0,0813	413	0,996738
0,0650	264	0,996837
0,0360	80	0,996988
0,0112	8	0,996925
0,0026	1	0,996915
c) Longueur de 2 cm. 52 $h = 86 \text{ cm}$		
Amplitude	Correction	Durée
0,1120	786 10^{-6} T'	0,992880 T'
0,0862	464	0,993722
0,0477	142	0,995096
0,0247	38	0,995245
0,0165	17	0,995221
0,0023	0	0,994898

d) Longueur de 1 cm. 15 $h = 90$ cm.

Amplitude	Correction	Durée
0,1027	659 10^{-6} T'	0,97418 T'
0,0625	244	0,98286
0,0446	124	0,98766
0,0303	57	0,98933
0,0205	25	0,98994
0,0152	14	0,99005
0,0062	2	0,98998
0,0022	0	0,98988
0,0015	0	0,98969

e) Longueur de 6 mm. 1 $h = 91$ cm.

Amplitude	Correction	Durée
0,078	4 10^{-4} T'	0,9375 T'
0,051	1	0,9550
0,020	0	0,9602
0,002	0	0,9600

L'amortissement est considérable. Le pendule revient au repos après 300 oscillation environ, l'observation est moins précise que dans les cas précédents.

Quelle que soit la longueur de la lame, c'est toujours une variation de même forme que l'on retrouve : une augmentation initiale de durée, à partir des oscillations infiniment petites, un maximum puis une décroissance plus ou moins rapide. Caractérisons encore l'effet de la lame (au moins aux grands arcs) par le taux moyen de cette décroissance, nous obtenons ;

Longueur de la lame	Variation moyenne de durée par radian
28,80 cm.	0,0073 sec.
8,36	0,0074
2,52	0,030
1,15	0,18
0,61	0,65

Les conclusions sont nettes. *Pour des lames qu'on peut considérer comme très longues* (par rapport aux longueurs habituelles de suspension) *l'effet est indépendant de la longueur de la lame, et relativement faible.*

Au contraire *quand on diminue la longueur de la lame, à partir d'une certaine valeur, l'effet devient de plus en plus considérable.*

En même temps, le maximum observé correspond à une amplitude de plus en plus petite.

2^o *Autre expérience.* — J'ai fait une étude analogue à la précédente en modifiant la masse du pendule. J'ai pris un pendule pesant 10 kg. 755, et l'ai suspendu d'abord à la lame de 0 mm. 46 d'épaisseur et de 1 cm. 15 de longueur.

J'ai obtenu alors un maximum de durée pour 0 rad. 008, et une décroissance moyenne de 0 sec. 036 par radian (soit 5 fois moindre que celle obtenue avec le poids de 1 kg. 200):

Avec une lame de 5 mm. de longueur j'ai obtenu un maximum peu net vers 0,004 et une décroissance moyenne de 0 sec. 24 par rad.

Donc, la lame étant devenue 2 fois plus courte, l'effet d'accélération est devenu environ 7 fois plus grand.

On voit la variation énorme à l'isochronisme produite par les lames relativement courtes (variation de l'ordre du $\frac{1}{100}$ de seconde, dans le dernier exemple, entre les durées aux grands et aux petits arcs).

Je rappelle que ce sont des lames encore plus courtes mais moins épaisses que Laugier et Winnerl proposent pour réaliser l'isochronisme.

Si on se reporte aux conséquences de la théorie ordinaire, développées dans la note IV et qui se simplifient notablement dans le cas des lames courtes, on voit que pour ces lames la correction d'amplitude devrait se réduire très sensiblement à $\frac{\theta_0^2}{16} T$. *La théorie et l'expérience sont en complet désaccord.*

5. *Influence de la largeur de la lame.* — En utilisant une lame de même épaisseur (0 mm. 46) que dans l'expérience précédente, mais de largeur deux fois moindre (1 cm.), on trouve, avec le pendule de 10 k. 755, les résultats suivants :

1° Pour une lame courte (5 mm. de longueur), l'effet initial de retard, ainsi que l'effet d'accélération aux grands arcs deviennent sensiblement deux fois moindres.

2° Pour une lame relativement longue (2 cm. 52) on ne retrouve pas cette loi de proportionnalité; l'effet est ici presque indépendant de la largeur de la lame.

6. *Influence du poids du pendule.* — Les expériences suivantes sont faites avec une lame d'acier de 0 mm. 46 d'épaisseur, de 2 cm. 52 de longueur et de 2 cm. de largeur et, avec des pendules de poids variés, mais ajustés de telle façon qu'ils battent sensiblement la seconde.

a) Pendule de 1 kg. 200. Distance du centre de gravité à la lame $h = 86$ cm.		
Amplitude	Correction	Durée corrigée
0,1120	786 10^{-6} T'	0,992880 T'
0,0862	464	0,993722
0,0477	142	0,995096
0,0247	38	0,995245
0,0165	17	0,995221
0,0023	0	0,994898
b) Pendule de 2 kg. 318. $h = 77$ cm. 3		
Amplitude	Correction	Durée
0,1300	1065 10^{-6} T'	0,994767 T'
0,0641	281	0,996878
0,0376	88	0,997387
0,0170	18	0,997667
0,0071	3	0,997693
0,0036	1	0,997595
0,0020	0	0,997513
0,001	0	0,997487
c) Pendule de 4 kg. 213. $h = 74$ cm. 2		
Amplitude	Correction	Durée
0,0886	491 10^{-6} T'	0,996550 T'
0,0474	139	0,997588
0,0086	5	0,998143
0,0019	0	0,998098

d) Pendule de 10 kg. 755 $h = 73 \text{ cm. } 8$		
Amplitude	Correction	Durée
0,1305	1060 10 6 T'	1,000239 T'
0,0581	216	1,001397
0,0523	171	1,001479
0,0357	80	1,001725
0,0191	23	1,001900
0,0083	4	1,002080
0,0026	0	1,002066
0,0012	0	1,001992

Si on caractérise encore l'effet de la lame par la décroissance moyenne de la durée d'oscillation qu'elle produit aux grands arcs, rapportée au radian, on obtient :

Poids du pendule	Variation de la durée simple rapportée au radian
1,200 kg.	0,034 sec.
2,318	0,027
4,213	0,020
10,755	0,013

Donc, à mesure que le poids du pendule augmente, l'effet d'accélération de la lame diminue.

7. — De l'ensemble des résultats précédents, on peut dégager les conclusions suivantes applicables aux suspensions usuelles :

1° La lame de suspension du pendule produit des variations très importantes d'isochronisme (variations non prévues par la théorie ordinaire). L'effet principal est une diminution de la durée d'oscillation aux grandes amplitudes.

2° Pour une lame et un pendule déterminés ces variations sont bien définies. Elles ne dépendent pas du temps et des petits changements de température.

3° A cause de l'impossibilité de faire les expériences avec

un même acier (de constitution moléculaire, de degré de trempe bien définis), on ne peut relier entre eux tous les résultats et énoncer de lois précises. On ne peut qu'indiquer le sens dans lequel varie l'effet de lame avec les différents facteurs dont il dépend.

Cet effet augmente beaucoup quand on diminue la longueur de la lame, (à partir d'une certaine longueur de l'ordre de 1 cm). Il augmente quand on fait croître l'épaisseur et la largeur de la lame et quand on diminue le poids du pendule.

Pour préciser le mode d'action de la lame, je me suis éloigné des conditions ordinairement réalisées, dans une série d'expériences que je vais maintenant relater.

IV. — Expériences avec des lames très longues

1. — Nous avons vu que lorsque la lame de suspension est assez longue, l'effet perturbateur devient indépendant de sa longueur.

Les lois des longues lames semblent donc différentes de celles des lames courtes. *A priori*, d'ailleurs il paraît devoir en être ainsi, car le calcul montre que le couple moteur exercé par une lame longue est très petit; elle n'intervient que par sa déformation, c'est-à-dire, qu'elle agit très différemment d'une lame courte, laquelle au contraire, n'a d'effet sensiblement que par le couple moteur qu'elle ajoute à celui de la pesanteur.

Il y avait donc lieu de déterminer les variations d'isochronisme de pendules suspendus à des lames très longues ou à des fils.

Le pendule qu'on étudie est constitué par une très longue lame d'acier à l'extrémité inférieure de laquelle est fixée une masse pesante (en plomb); le système se rapproche ainsi de ce qu'on pourrait appeler un « pendule simple élastique » pour lequel les calculs qui résultent de l'application de la théorie se simplifient notablement.

La lame d'acier qui a servi à ces expériences a 0 mm. 46 d'épaisseur, 1 cm. 81 de largeur et une longueur de l'ordre du mètre, variable selon la masse qui y est suspendue et telle que le pendule batte à peu près la seconde.

a) *Pendule de 0 kg. 135. Longueur de la lame : 105 cm. 1.*
(la masse est une lentille de plomb de 5 cm. de diamètre).

Amplitude	Correction	Durée
0,093	540 10^{-6} T'	1,008551 T'
0,051	170	1,008450
0,040	90	1,008340
0,010	7	1,008190
0,005	2	1,007934
0,0035	1	1,007926

On observe à partir des amplitudes très petites, une augmentation de la durée d'oscillation sans maximum, ni décroissance (Courbe 1, figure 22). L'effet de la lame semble donc avoir une allure nouvelle.

b) *Pendule de 1 kg. 056. Longueur de la lame : 94 cm. 8.*
(La masse est une lentille de plomb de 7 cm. de diamètre).

Amplitude	Correction	Durée
0,0734	336 10^{-6} T'	1,002363 T'
0,0540	180	1,002427
0,0468	137	1,002439
0,0284	50	1,002475
0,0253	40	1,002460
0,0217	29	1,002452
0,0128	10	1,002425
0,0063	2	1,002380
0,0027	0	1,002337

On voit ici apparaître l'allure générale des courbes rencon-

trées dans la première série d'expériences. Augmentation de durée, maximum, puis diminution (courbe 2).

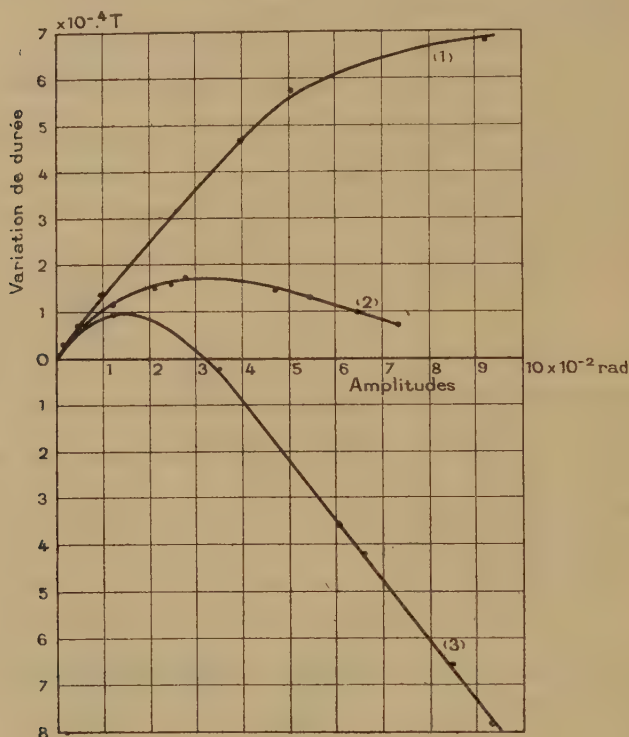


Fig. 22.

- (1) Pendule de 0 k. 135 ;
 (2) — 1 k. 056 ;
 (3) — 7 k. 450.

c) Pendule de 7 kg. 450. Longueur de la lame : 80 cm. 1.
 (La masse est une lentille de plomb de 12 cm. de diamètre).

On retrouve tout à fait ici, l'aspect des variations de la première série d'expériences (courbe 3).

Amplitude	Correction	Durée
0,0931	540 10^{-6} T'	1,002051 T'
0,0842	441	1,002191
0,0654	264	1,002396
0,0601	225	1,002492
0,0346	72	1,002835
0,0132	11	1,002948
0,0025	0	1,002890

On voit que, l'augmentation initiale de la durée d'oscillation prend d'autant plus d'importance relative que le poids du pendule est faible.

J'ai donné le détail de ces nouvelles expériences, car elles montrent par rapport aux premières, un caractère nouveau des variations d'isochronisme. Ici, *l'effet d'accélération aux grands arcs augmente quand on augmente le poids du pendule.*

0,0025 sec. p. radian pour le pendule de 1 kilogramme
 0,012 — — — — — 7 — —

d) Avec le même pendule de 7 kg. 450 et une lame de 80 cm. de longueur mais de 0 mm. 2 d'épaisseur, on trouve une augmentation de 0 sec. 0001 jusqu'au maximum vers 0 rad. 0,15 puis une diminution moyenne de durée de 0 sec. 008 par radian.

e) *Expérience avec un fil d'acier.* — Ce fil a 1 mm. 04 de diamètre, sa longueur est de 79 cm. 4. Le pendule pèse 7 kg. 450.

Amplitude	Correction	Durée
0,115	841 10^{-6} T'	1,00533 T'
0,088	484	1,00547
0,042	110	1,00548
0,022	30	1,00534
0,006	2	1,00502
0,0025	0	1,00495

Aux amplitudes ordinaires, nous observons une augmentation de la durée d'oscillation. La décroissance aux grandes amplitudes est à peine sensible.

2. — Il résulte de ces expériences sur les lames très longues et le fil d'acier, que leur effet est différent de celui des lames courtes.

L'effet initial d'augmentation de la durée d'oscillation a ici une importance beaucoup plus grande; il diminue quand le poids du pendule augmente. D'autre part pour les amplitudes assez grandes, auxquelles se fait sentir l'effet d'accélération de la lame, cet effet croît avec la masse du pendule, contrairement à ce qui se passait avec les lames courtes.

Aucun de ces faits n'est explicable par la théorie ordinaire.

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que des lames d'acier. Ce sont les seules, pratiquement, dont on se serve en horlogerie (on a cependant utilisé quelquefois des lames d'or). Mais pour découvrir la nature exacte de l'influence de la lame, nous devons nous éloigner encore des conditions habituelles et opérer avec des lames de métaux variés. Trouve-t-on, avec ces lames les mêmes résultats qu'avec l'acier?

3. *Expériences avec des lames de métaux variés.* — J'ai opéré avec des lames assez longues, d'au moins plusieurs centimètres de façon que les résultats fussent, comme je l'ai déjà fait remarquer, d'une interprétation plus simple.

Les expériences n'ont pas été systématiques comme celles qui concernent l'acier, car ayant pris beaucoup de soin pour que les lames soient ajustées de façon identique, j'ai constaté une très grande variété dans les résultats, non seulement en passant d'un métal à l'autre, mais même d'un échantillon à un autre du même métal.

J'ai cependant vérifié, que pour une lame déterminée, les résultats étaient bien réguliers et que les variations suivaient des lois analogues à celles obtenues pour l'acier (en fonction de la longueur de la lame, et du poids du pendule).

Je me suis assuré d'une part que la diversité obtenue dans les résultats ne tenait pas à un ajustement défectueux de la lame, en répétant les expériences dans des conditions diverses et d'autre part que les lames ne subissaient pas de déformation permanente sous l'influence des efforts exercés par le pendule.

a) *Lame d'aluminium*. — Longueur 3 cm. 81, largeur 1 cm. 35, épaisseur 0 mm. 50, le pendule pèse 2 k. 190.

Amplitude	Durée
0,094	1,00255 T'
0,065	1,00262
0,052	1,00270
0,031	1,00272
0,017	1,00258
0,005	1,00255
0,003	1,00253

L'effet n'est pas sensiblement différent de celui produit par une lame d'acier. La variation a la même forme, avec maximum net.

b) *Lame d'argent*. — Longueur 3 cm. 38, largeur 0 cm. 53, épaisseur 0 mm. 45, le pendule pèse 2 k. 190.

Amplitude	Durée
0,092	1,00400 T'
0,065	1,00394
0,042	1,00388
0,036	1,00385
0,024	1,00376
0,015	1,00364
0,003	1,00342

L'épaisseur de la lame est de l'ordre de celle d'une des

lames d'acier qui ont été utilisées. Cependant, le résultat est ici tout à fait différent : il y a constamment augmentation de la durée d'oscillation à mesure que l'amplitude croît.

c) *Lame de laiton*. — Longueur 3 cm. 07, largeur 1 cm. 77, épaisseur 0 mm. 45, le pendule pèse 2 k. 190.

Amplitude	Durée
0,120	1,002892 T'
0,086	1,002877
0,078	1,002825
0,048	1,002780
0,036	1,002736
0,031	1,002703
0,012	1,002600
0,002	1,002503

Le résultat est analogue à celui de la lame d'argent. A partir des petits arcs, la durée croît constamment.

d) *Autre lame de laiton*. — Longueur 3 cm. 01, largeur 1 cm. 20, épaisseur 0 mm. 45, le pendule pèse 2 k. 190.

Amplitude	Durée
0,098	1,00335 T'
0,078	1,00351
0,052	1,00390
0,035	1,00447
0,013	1,00484
0,003	1,00484

Cette nouvelle lame de laiton donne donc un résultat entièrement différent de la première. Elle a cependant même épaisseur et même longueur.

J'ai fait une expérience avec une longueur plus considérable de la même lame. Le résultat a été le même ; il y a avec

cette lame une diminution très sensible de la durée d'oscillation à mesure que l'amplitude augmente.

Voilà donc deux échantillons de laiton qui donnent des effets opposés.

e) *Fil de cuivre rouge*. — Diamètre du fil 1 mm., longueur 80 cm. 3, le pendule pèse 1 k. 056.

Amplitude	Durée
0,093	1,00587 T
0,057	1,00598
0,022	1,00580
0,005	1,00575

L'allure de la variation rappelle celle obtenue avec le long fil d'acier.

Remarque. — Si on relance le pendule on ne retrouve pas la même valeur de la durée d'oscillation aux petits arcs. Elle est plus petite de 0 sec. 00005. Il s'agit sans aucun doute, de l'influence de l'érouissage du métal.

Les effets obtenus ne caractérisent évidemment pas un métal déterminé. Ils sont dus à un échantillon particulier et dépendent essentiellement de son état moléculaire.

V. — Interprétation des résultats. Formule empirique reliant la force élastique de la lame à sa déformation

1. — Nous sommes en présence d'un ensemble très complexe de faits expérimentaux. Quelle conclusion pouvons-nous tirer de nos observations, quelle hypothèse pouvons-nous faire pour tenter de les relier les unes aux autres ?

Si nous considérons la forme générale de la variation de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude, nous sommes

amenés à penser qu'elle est due à la superposition de plusieurs effets : le premier serait proportionnel à l'amplitude et tendrait à augmenter la durée quand l'amplitude augmente. Le deuxième, proportionnel au carré de l'amplitude, agirait en sens contraire. Un troisième effet, qui n'apparaît que dans le cas de lames très rigides, s'ajouterait au premier et serait proportionnel au cube de l'amplitude.

Cela revient à dire que l'on peut poser pour la variation ΔT de la période T correspondant à l'amplitude θ_0 :

$$(1) \quad \Delta T = A\theta_0 - B\theta_0^2 + C\theta_0^3$$

expression dans laquelle A , B , C , sont des constantes positives. Ces constantes doivent dépendre essentiellement de la nature des métaux et des dimensions des lames, en sorte qu'on pourra observer, dans les limites ordinaires de l'amplitude utilisées, soit uniquement une augmentation, soit une augmentation initiale suivie d'un maximum de la durée puis d'une diminution.

L'idée la plus simple, pour expliquer les faits observés, est que, par suite des déformations de la lame en fonction de l'amplitude, le couple moteur et le centre d'oscillation se modifient de façon à donner la variation (1).

Mais les calculs de la note IV montrent de façon certaine, que dans aucun cas, en appliquant la théorie ordinaire de la flexion, on ne peut prévoir de variations sensibles à l'isochronisme.

C'est donc la théorie élémentaire, ordinaire, qui doit être en défaut. Comment la modifier ?

Elle admet que le métal est caractérisé par un module d'élasticité, indépendant de la déformation, et que la courbure en un point de la lame est proportionnelle : 1^o à l'inverse de ce module ; 2^o à la somme des moments des forces actives par rapport à ce point.

Cette théorie est insuffisante. D'une part, elle ne tient pas compte de toutes les déformations simultanées de la lame (en

particulier de celles qui sont produites par l'effort tranchant, et par l'effet de contraction transversal des fibres).

D'autre part, l'hypothèse d'un module d'élasticité indépendant de la déformation, revient à admettre que la loi de Hooke est applicable à la *déformation finie* que l'on envisage dans la théorie; or il est certain que la loi de Hooke n'a de sens que pour les déformations infiniment petites et que seule, l'expérience peut décider si la déformation finie est encore proportionnelle à l'effort.

Il serait difficile de faire une théorie exacte et utilisable de la flexion, tenant compte de toutes les particularités de ce phénomène complexe⁽¹⁾; de plus, si la loi de Hooke ne s'étend pas, comme il est très probable aux déformations finies, cette théorie serait elle-même insuffisante et inapplicable.

Il semble donc que la meilleure façon de traiter le problème soit la suivante :

Nous admettons que les modifications à la loi d'isochronisme, du pendule à ressort, sont dues à l'existence d'écarts à la loi de proportionnalité entre la force et la déformation. Puis nous déterminons, à l'aide des résultats expérimentaux, quelle *loi empirique* doit remplacer, pour un échantillon donné d'un métal, la loi simple de la théorie élémentaire.

Ce serait un autre problème que nous n'aborderons pas ici, de chercher si pour un métal déterminé, la loi empirique trouvée, s'applique à d'autres modes de déformation ou au contraire, ne concerne que la flexion.

2. — Précisons donc notre hypothèse. La flexion étant une déformation hétérogène, il est nécessaire de considérer, comme on le fait dans la théorie élémentaire, une tranche

(1) Par exemple, LAMB (*Phil. Mag.* 5^e s. 31, 1891) cherche comment est modifiée la loi de flexion, par l'existence de la courbure transversale de la lame, mise en évidence par CORNU puis MALLOCK; il trouve qu'au delà d'une certaine flexion le couple croît beaucoup plus vite que la courbure de la lame, mais ce résultat ne suffit pas à expliquer les faits que nous avons observés.

mince ou fibre de la lame, comprise entre deux sections droites très voisines, et de section dS très petite. Soit D la déformation relative de cette fibre (quotient de la déformation par la longueur de la fibre). On écrit dans la théorie élémentaire que la force élastique dF , correspondant à cette déformation est :

$$dF = E.D.dS$$

E est le module d'Young du métal utilisé.

Ecrivons que dF est fonction de la déformation et bornons-nous, dans le développement de la fonction $dF = f(D)dS$ aux premiers termes ; nous sommes conduits à poser :

$$(2) \quad dF = E[D + \alpha D^2 + \beta D^3 + \gamma D^4 + \dots]dS$$

α, β et γ sont des coefficients qui dépendent de la nature du métal, E est le module d'élasticité, pour les très petites déformations.

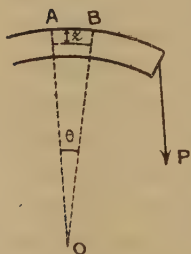


Fig. 23.

Soit alors une lame métallique (dont l'épaisseur est petite par rapport à la longueur), encastree à l'une de ses extrémités et fléchie par une charge appliquée à l'autre. Considérons dans le plan de symétrie de cette lame l'élément AB (fig. 23) compris, après déformation, dans le petit angle θ entre deux sections droites voisines ; il a une courbure

$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ (φ étant l'angle de la tangente en un point de AB avec une direction fixe, ds l'élément d'arc et ρ le rayon de courbure AO).

On admet, dans la théorie élémentaire, qu'une certaine fibre (fibre neutre) ne se déforme pas ; c'est le lieu des centres d'inertie des diverses sections droites.

La fibre située à la distance z au-dessus de cette fibre neutre s'allonge de la quantité $z\theta = z \frac{AB}{\rho}$ et sa déformation

relative est $\frac{z}{\rho}$. Celle qui est située à la même distance z au-dessous, se raccourcit de la même quantité.

Il s'agit, pour ces deux fibres, de deux modes différents de déformation. Rien ne nous permet de dire que la fonction $dF = f(D)dS$ soit la même pour ces deux fibres.

Mais nous pouvons écrire les forces élastiques sous la forme (2), avec des coefficients différents : $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ pour la dilatation : $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$ pour la contraction, de façon à avoir pour la somme des moments des forces élastiques correspondant à ces deux fibres :

$$EdS \left[\frac{z^2}{\rho} + (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{z^3}{\rho^2} + (\beta_1 + \beta_2) \frac{z^4}{\rho^3} + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{z^5}{\rho^4} + \dots \right]$$

D'autre part, notre hypothèse, n'introduisant que des corrections petites à la loi de proportionnalité, ne modifie pas sensiblement la position de la fibre neutre; nous pouvons admettre qu'il y a autant de fibres de section dS , dilatées, que de fibres contractées. Par suite, la somme des moments des forces élastiques pour toute la section S de la lame, s'écrira :

$$E \left[\frac{1}{\rho} \int_S z^2 dS + \frac{\alpha}{\rho^2} \int_S z^3 dS + \frac{\beta}{\rho^3} \int_S z^4 dS + \frac{\gamma}{\rho^4} \int_S z^5 dS + \dots \right].$$

α, β, γ , sont ici les moyennes des coefficients correspondant respectivement à la traction et à la compression, et z doit être pris en valeur absolue :

Posons :

$$I_s = \int_S z^2 dS$$

$$K = \int_S z^3 dS$$

$$K' = \int_S z^4 dS$$

$$K'' = \int_S z^5 dS$$

et écrivons que la somme des moments des forces élastiques égale le moment M des forces extérieures, il vient :

$$(3) \quad M = EI_s \left[\frac{d\varphi}{ds} + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 + K'' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^4 + \dots \right].$$

Dans le cas d'une lame de section rectangulaire, d'épaisseur e , et de largeur c , on trouve :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_s = \frac{1}{12} c e^3 \\ K = \frac{3}{8} \alpha e \\ K' = \frac{3}{20} \beta e^2 \\ K'' = \frac{1}{16} \gamma e^3 \end{array} \right.$$

C'est la relation (3) qui doit remplacer la formule :

$$M = EI_s \cdot \frac{d\varphi}{ds}$$

d'où l'on part dans la théorie élémentaire. Nous aurions pu l'écrire de suite, mais les considérations précédentes ont l'intérêt de montrer de quelle façon les coefficients $K, K', K'' \dots$ dépendent de l'épaisseur de la lame.

3. — *Conséquence de l'hypothèse précédente. Son influence sur le mouvement du pendule à lame élastique.* — J'ai développé dans la note V, le calcul du mouvement du pendule à partir de la loi de flexion modifiée par l'hypothèse d'écarts à la loi de proportionnalité, c'est-à-dire prise sous la forme (3), et j'ai déterminé la variation de durée (ΔT) en fonction de l'amplitude θ_0 .

Si P est le poids du pendule, μ le moment d'élasticité de flexion défini, dans le cas d'une lame à section rectangulaire par l'expression : $\left[\mu = EI_s = \frac{E \cdot c e^3}{12} \right]$, l la longueur de la lame et L la longueur du pendule simple synchrone, et si on

pose $\omega = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$, on arrive à la relation suivante, dans le cas où le rayon de gyration est petit par rapport à la longueur L du pendule (cas de mes expériences) :

$$(5) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{3\pi L} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{sh^2 \omega l} \right) K \theta_0 - \frac{3}{64L} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left(\frac{2ch^3 \omega l + 3ch \omega l}{sh^3 \omega l} + \frac{3\omega l}{sh^4 \omega l} \right) K' \theta_0^2$$

En identifiant cette expression avec (1) nous aurions les coefficients A et B . Je me suis borné, dans le cas général, au calcul de deux termes, car l'influence du troisième terme est peu nette dans mes expériences.

Voyons si cette formule (5) permet de retrouver *l'allure qualitative* des résultats expérimentaux.

Tout d'abord, on voit que l'effet de la lame dépendra essentiellement de l'expression $l \sqrt{\frac{P}{\mu}}$.

Il n'est pas possible d'énoncer d'une manière simple les lois qu'exprime la formule (5). On peut le faire seulement si ωl est grand ou petit par rapport à l'unité.

4. — ωl est grand par rapport à 1 (lames longues et flexibles). On a :

$$(6) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{9\pi} \frac{K}{L} \theta_0 - \frac{3}{32} \frac{K'}{L} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \theta_0^2 - \frac{16}{75\pi} \frac{K''}{L} \frac{P}{\mu} \theta_0^3$$

Ici le calcul, plus simple, du terme en K'' a été fait directement.

les lois qui sont la conséquence de notre hypothèse sont les suivantes :

1° Le terme en θ_0 est proportionnel, par K , à l'épaisseur de la lame ; le terme en θ_0^2 est proportionnel à sa racine carrée. Cela se traduit pas le fait que le maximum de la courbe se déplace vers les grandes amplitudes à mesure que l'épaisseur augmente ;

2^o Le terme en θ_0 est indépendant du poids du pendule ; le terme en θ_0^2 croît quand on augmente le poids, proportionnellement à sa racine carrée ;

3^o L'effet de la lame est indépendant de sa longueur. L'examen des tableaux, montre que cela correspond bien aux faits expérimentaux. En particulier les deux faits suivants : augmentation du terme en θ_0^2 pour des poids croissants, et effet indépendant de la longueur, sont bien vérifiés pour les lames longues (plus exactement pour les lames avec lesquelles ωl est assez grand).

5. — ωl est petit par rapport à 1 (lames courtes et rigides). — Dans ce cas on peut remplacer $sh\omega l$ par ωl et $ch\omega l$ par l'unité et il vient :

$$(6) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{\mu}{PL} \left(\frac{4}{3\pi} \frac{K}{l^2} \theta_0 + \frac{3}{8} \frac{K'}{l^2} \theta_0^2 \right).$$

Cette formule n'exprime que les lois qui seraient obtenues à la limite, pour des lames très courtes ou extrêmement rigides. Elle montre une influence énorme de l'épaisseur et de la longueur. La variation est proportionnelle à la largeur de la lame.

Pratiquement je n'ai pas utilisé de telles lames ; nous avons vu cependant que quand l'épaisseur croît et surtout quand la longueur diminue, l'effet de la lame (surtout dû au terme en θ_0^2) augmente beaucoup.

Enfin l'effet est théoriquement inversement proportionnel au poids du pendule. Nous avons bien trouvé le même sens de variation mais pas exactement cette loi, ce qui n'a rien d'étonnant, car la quantité ωl n'était jamais très petite dans nos expériences.

6. — En première analyse nous constatons donc que notre hypothèse s'accorde avec les faits.

Mais si elle a une valeur réelle, elle doit posséder quelque généralité, et pouvoir s'appliquer aux lois plus simples, de l'équilibre de flexion.

IV. — Détermination des écarts à la loi élémentaire de la flexion par des expériences statiques

1. — Je me suis donc proposé de rechercher si pour une lame fléchie par des poids croissants, on trouvait effectivement des écarts à la loi élémentaire de la flexion.

Il était indiqué de se servir d'une lame d'acier ayant été employée pour des expériences pendulaires.

La lame qui a été utilisée est celle qui a servi aux recherches sur les oscillations des pendules à longue lame d'acier.

Elle a comme dimensions dans une première expérience :

Longueur	5 cm. 117
Largeur	1 cm. 81
Epaisseur	0 mm. 46

La lame est encastrée fortement à une de ses extrémités et de façon à être bien horizontale; on la fléchit par des charges P placées dans un plateau qui est fixé à son extrémité libre. Cette extrémité est visée à l'aide d'un microscope micrométrique, qui permet d'évaluer ses déplacements à $\frac{1}{1.000}$ mm. près.

On détermine la position d'équilibre de la lame sans surcharge, puis sous l'action d'une surcharge déterminée, enfin à nouveau sans surcharge. Le tableau suivant donne la flèche en millimètres, en fonction de la surcharge en grammes. Il est obtenu par la moyenne de trois expériences.

Surchar- ge P	Flèche a	Rapport $\frac{a}{P}$	Surchar- ge P	Flèche a	Rapport $\frac{a}{P}$
gr.	mm				
2	0,035	0,0175	75	1,316	0,01755
5	0,088	0,0176	80	1,398	0,01747
10	0,176	0,0176	85	1,483	0,01745
15	0,265	0,01765	90	1,561	0,01735
20	0,354	0,01768	95	1,642	0,01729
25	0,443	0,01774	100	1,723	0,01723
30	0,533	0,01777	105	1,805	0,01719
35	0,622	0,01777	110	1,880	0,01709
40	0,711	0,01777	115	1,956	0,01701
45	0,798	0,01775	120	2,036	0,01697
50	0,885	0,01770	125	2,106	0,01685
55	0,975	0,01772	130	2,190	0,01685
60	1,059	0,01765	135	2,264	0,01677
65	1,146	0,01763	140	2,336	0,01669
70	1,231	0,01759	145	2,416	0,01666
			150	2,491	0,01661

Le rapport $\frac{a}{P}$ croît jusqu'à sa valeur correspondant à une surcharge de 35 g. puis décroît ensuite.

Avant de conclure, il faut préciser ce que prévoit la théorie ordinaire. En effet, la théorie élémentaire qui conduit à l'expression de la flèche de flexion :

$$a = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI_s}$$

suppose la courbure assez petite pour qu'on puisse négliger son carré devant l'unité.

Il faut tenir compte de la courbure non infiniment petite et du fait qu'à mesure que la lame fléchit, la surcharge agit à l'extrémité d'un bras de levier plus court. Par le calcul de la note VI, on tient compte de toutes ces particularités.

Ce calcul conduit à la relation suivante :

$$\frac{a}{P} = \frac{l^3}{3\mu} \left(1 - \frac{4}{35} \frac{l^4}{\mu^2} P^2 \right)$$

Dans le cas de la lame étudiée on a :

$$E = 1,71.10^{12} \text{ et } \mu = EI_s = 25,1.10^6.$$

On voit que la correction apportée à la formule élémentaire par le calcul exact, ne permet pas d'expliquer les résultats obtenus. Cette correction est négligeable même pour les charges les plus grandes employées.

On est alors amené à conclure que si la loi de proportionnalité de la flèche à la charge n'est pas vérifiée expérimentalement, c'est que la loi de Hooke n'est pas applicable aux déformations finies de la flexion.

Dans la deuxième partie de la note VI se trouvent développées les conséquences de cette hypothèse et déterminée l'influence des termes en K , K' et K'' précédemment introduits à propos des expériences sur les pendules.

On arrive à l'expression suivante du rapport de la flèche à la charge (en laissant de côté le terme $-\frac{4}{105} \frac{l^7}{\mu^3} P^2$ précédemment trouvé, et négligeable).

$$(7) \quad \frac{a}{P} = \frac{l^3}{3\mu} - \frac{1}{4} K \frac{l^4}{\mu^2} P - \frac{1}{5} K' \frac{l^5}{\mu^3} P^2 - \frac{1}{6} K'' \frac{l^6}{\mu^4} P^3$$

Comparons l'expérience et la théorie pour obtenir K , K' et K'' . L'expérience de flexion peut se traduire par la formule empirique suivante :

$$(8) \quad \frac{a}{P} + 18,5 \cdot 10^{-6} P - 30,1 \cdot 10^{-8} P^2 + 93,6 \cdot 10^{-11} P^3.$$

(a est exprimé en millimètres et P en grammes).

Identifions les expressions (7) et (8) (système C. G. S.). Nous trouvons :

$$\begin{aligned} K &= -7,0 \\ K' &= +710 \\ K'' &= -13\,200. \end{aligned}$$

2. — Pour déterminer avec quelle approximation sont connus ces coefficients, il était nécessaire de faire d'autres expériences, avec la même lame. Je n'en donnerai pas le détail ; elles sont en tous points semblables à la précédente.

On trouve :

Avec une longueur de 9 cm. 57 de la lame :

$$K = -7,7; \quad K' = +1.040; \quad K'' = -14.000.$$

Avec une longueur de 2 cm. 57 :

$$K = -8,8; \quad K' = +700; \quad K'' = -11.400.$$

3. — Les résultats sont assez concordants. Mais comme on pourrait penser qu'une erreur systématique a pu intervenir, j'exposerai brièvement une nouvelle expérience dans laquelle la lame fléchit dans des conditions assez différentes des précédentes, mais se rapprochant de celles qui sont réalisées dans les expériences pendulaires.

C'est encore la même lame qui a été utilisée; sa longueur est limitée à 2 cm. 55. Elle est encastrée verticalement, et au pince-lame inférieur est adapté (au lieu du pendule) un levier horizontal à deux bras égaux, analogue au fléau d'une balance; aux deux extrémités de ce levier sont suspendus par des étriers reposant sur des couteaux, des plateaux de poids égaux.

L'expérience consiste à mettre des poids croissants successivement dans chaque plateau et à déterminer comment varie la flèche de flexion; celle-ci s'obtient en pointant au microscope un repère situé au point d'encastrement inférieur de la lame.

Le calcul de l'équilibre d'un tel système, à partir de la loi ordinaire de la flexion, se fait sans difficulté par une voie analogue à celle qui est suivie au début de la note III; d'autre part, l'influence des termes en K , K' , K'' , ..., modifiant la loi ordinaire, s'obtient comme pour le problème correspondant résolu dans la note IV. Aussi je ne donnerai pas ces calculs assez longs. Le résultat est le suivant :

Appelons a la flèche observée, p la surcharge, l la longueur de la lame, L la longueur d'un des bras du fléau (7 cm. 770); π le poids du fléau (113 gr.), P le poids des plateaux (34 gr. 4), d la distance du centre de gravité du

fléau au point d'encastrement inférieur de la lame (1 cm.),
c la distance verticale des couteaux au même point (4 cm. 1).

Posons, d'autre part :

$$Y = P + p + \pi \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}.$$

En considérant que dans ces expériences, la quantité ωl reste toujours petite ($< 0,3$) on peut simplifier beaucoup les termes correctifs sans erreur sensible, et on trouve :

$$\alpha = \frac{\rho L(ch\omega l - 1)}{Ych\omega l + (Yc + \pi d)sh\omega l} - \left(2K \frac{\alpha^2}{7^2} + 4K' \frac{\alpha^3}{7^4} + 8K'' \frac{\alpha^4}{7^6} + \dots \right)$$

μ étant calculé pour une flèche observée, très petite, on trouve le même résultat que dans les expériences précédentes. Si alors on détermine les écarts entre la flèche mesurée et la flèche calculée en supposant la correction nulle, on peut obtenir K , K' , K'' .

Par exemple, pour $p = 50$ gr. on trouve pour la flèche calculée : 0 mm. 452, la flèche observée est 0 mm. 439. De l'ensemble des résultats dont il serait trop long de donner le détail, on déduit les valeurs suivantes :

$$K = -8,2; \quad K' = +940; \quad K'' = -15.100.$$

4. — Si on considère les conditions très diverses auxquelles se rapportent les expériences que nous venons d'exposer, on doit conclure qu'il n'est pas douteux que la loi ordinaire, qui admet une courbure proportionnelle au moment des forces extérieures, est insuffisante pour interpréter les faits de l'équilibre de flexion, et d'autre part, que la loi empirique que nous nous proposons de lui substituer est bien déterminée, grâce à un accord très satisfaisant des coefficients K , K' , K'' .

Les valeurs moyennes de ces coefficients sont :

$$K = -8; \quad K' = 850; \quad K'' = -13.000.$$

VII. — Retour aux expériences pendulaires et conclusions

1. — Pour chercher maintenant si ce sont bien les écarts à la loi élémentaire qui produisent les variations d'isochronisme des pendules à lames, nous allons déterminer K , K' , K'' à partir d'une expérience pendulaire faite *avec la même lame*, et nous comparerons ces valeurs aux précédentes.

Prenons l'expérience pendulaire où les deux effets superposés, l'un proportionnel à θ_0 l'autre à θ_0^2 , sont le mieux marqués. C'est celle où cette lame supporte un poids de 7 k. 450 ; elle a une longueur de 80 cm.

Peu importe que la longueur de la lame soit beaucoup plus grande dans l'expérience pendulaire que dans l'expérience statique puisque nous savons qu'à partir de quelques centimètres, la longueur de la lame n'a plus d'influence dans les variations de durée.

Je reproduis ici les valeurs trouvées :

Amplitude	Durée
0,093	1,002051 T'
0,084	1,002191
0,065	1,002396
0,060	1,002492
0,034	1,002835
0,013	1,002948
0,0025	1,002890

La variation ΔT par rapport à la durée de l'oscillation infiniment petite se représente très bien par la formule :

$$\frac{\Delta T}{T} = 0,01248 \theta_0 - 0,4874 \theta_0^2 + 2,820 \theta_{03}$$

Identifions avec l'expression théorique (6), trouvée dans le cas des lames longues :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{9\pi} \frac{K}{L} \theta_0 - \frac{3}{32} \frac{K'}{L} \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \cdot \theta_0^2 - \frac{16}{75\pi} \frac{K''}{L} \frac{Mg}{\mu} \theta_0^3$$

On a :

$$T = 1 \text{ sec. } 85 \qquad L = \frac{981 \cdot (1,85)^2}{4\pi^2} = 85 \text{ cm.}$$

L'identification donne :

$$K = -7,5$$

$$K' = 820$$

$$K'' = -12.000.$$

On retrouve sensiblement les mêmes valeurs que par les expériences statiques de flexion. Un accord moins bon aurait même été satisfaisant.

2. — L'expérience pendulaire que nous venons d'utiliser pour éprouver la valeur de l'hypothèse émise, n'est pas la seule qui ait été faite avec la lame d'acier considérée.

Les trois courbes de la figure 22 se rapportent à cette lame. Elles traduisent son effet sur la durée, pour trois poids du pendule.

La courbe (1) correspond au poids de 135 gr.

La courbe (2) — 1.056 gr.

La courbe (3) — 7.450 gr.

La variation (3) est conforme à notre hypothèse. Pouvons-nous, avec les effets (1) et (2) obtenir de nouvelles vérifications de la formule théorique ?

Nous avons déjà dit que cette formule donnait le résultat suivant :

1° Le terme en θ_0 est indépendant du poids du pendule.

2° Le terme en θ^2 est proportionnel à la racine carrée du poids du pendule.

Or, les courbes (1), (2), (3) ont même coefficient angulaire à l'origine. C'est la vérification de la première propriété.

D'autre part, des deux lois précédentes, il résulte que la

valeur de l'amplitude θ_m , pour laquelle il y a un maximum de la durée, est inversement proportionnelle à la racine carrée du poids du pendule (en considérant que l'influence du terme en K'' est petite). Pour la courbe (3) déjà étudiée, le maximum a lieu pour $\theta_m = 0,013$, on le déduit pour les autres.

$$\text{Courbe (1)} \quad \theta_m = 0,013 \sqrt{\frac{7450}{135}} = 0,096$$

$$\text{Courbe (2)} \quad \theta_m = 0,013 \sqrt{\frac{7450}{1056}} = 0,035$$

Or, ce sont très sensiblement les valeurs qu'on observe sur les courbes.

On peut donc considérer que les formules théoriques résultant de l'hypothèse d'écarts à la loi de proportionnalité entre la force et la déformation, sont *exactement vérifiées*.

3. — On peut se demander dans quelle mesure les valeurs que nous venons de trouver pour K , K' , K'' , avec la lame précédente, permettent d'interpréter les résultats obtenus avec d'autres lames. *A priori*, comme il ne s'agit pas du même métal, on ne peut rien affirmer à ce sujet.

Considérons par exemple la première des expériences décrites, faite avec une lame d'acier de 0 mm. 2 d'épaisseur et un pendule pesant 2 k. 193.

Admettons que les valeurs de α , β , γ , trouvées pour la lame de 0 mm. 46 d'épaisseur soient applicables ici, c'est-à-dire supposons qu'il s'agisse du même acier pour les deux lames, la formule (5) permet de calculer la variation d'isochronisme.

On trouve une courbe : $\frac{\Delta T}{T} = f(\theta_0)$ qui ne s'écarte pas trop de la courbe expérimentale ; les variations ainsi calculées, quoique plus faibles que celles que nous observons, sont du même ordre de grandeur. On trouve par exemple, par le calcul : 0,007 comme coefficient angulaire à l'origine, et 0,017 comme valeur de l'amplitude correspondant au

maximum de la courbe. Les valeurs expérimentales sont : 0,008 et 0,019.

J'ai cherché à vérifier quantitativement les formules, pour des lames d'acier qui ne sont pas très longues. Malgré l'absence, dans la formule (5) du terme en K'' (qui ne devient important qu'aux très grandes amplitudes) la vérification se fait d'une façon satisfaisante.

4. — Pour les lames d'acier utilisées (acier spécial pour suspensions) les coefficients α , β , γ , ont les valeurs moyennes suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= -5.10^2 \\ \beta &= 3.10^6 \\ \gamma &= -2.10^9.\end{aligned}$$

On peut, avec ces coefficients, écrire la formule empirique (2) reliant la force élastique à la déformation et déterminer *a priori* quels seront les écarts à la loi d'isochronisme produits par une lame d'acier donnée.

Les coefficients α , β , γ , dépendent beaucoup de la nature du métal ; par exemple pour la lame d'argent et la première des lames de laiton expérimentées, le coefficient α , seul intervient (même pour les déformations correspondant aux grandes amplitudes).

5. — Ainsi donc, à la fois par des expériences statiques et par des expériences dynamiques, il est démontré que la loi de proportionnalité entre la déformation *finie* de flexion et la force correspondante doit subir une correction.

Cette correction a été déterminée empiriquement pour une lame d'acier, mais il faut bien remarquer que la formule à 3 coefficients qui a été obtenue, ne peut s'appliquer qu'à des déformations suffisamment petites et telles que le dernier terme reste petit par rapport au précédent.

De tels écarts à la loi de proportionnalité avaient-ils déjà été observés ?

Les premières recherches ne donnèrent que des résultats

négatifs (celles de Weston ⁽¹⁾ en particulier). Mais les travaux de Kohlrausch et Grüneisen ⁽²⁾, de Bach ⁽³⁾ de Kusakabe ⁽⁴⁾ sur les métaux et les minéraux mirent en évidence une variation apparente du module d'élasticité avec la déformation, pouvant se représenter généralement par l'addition d'un deuxième terme à la loi linéaire (le module croît avec la déformation).

Cependant l'ensemble des résultats donne l'impression que le sujet n'est pas encore connu d'une façon satisfaisante. Cela tient sans doute, au peu de précision des expériences d'équilibre de flexion. La détermination des variations à la loi d'isochronisme d'un pendule suspendu à une lame du métal que l'on veut étudier, semble être une méthode beaucoup plus sûre et plus précise pour une telle étude.

6. — La flexion étant en relation très étroite avec la traction, on peut se demander si des écarts à la loi de proportionnalité entre les efforts et les allongements élastiques d'un fil métallique ont été constatés.

Les expériences de J.-O. Thompson ⁽⁵⁾ sur la traction de fils variés, de Kyriloff ⁽⁶⁾ (critiquant les précédentes), de Meyer ⁽⁷⁾ sur l'aluminium, de Basch sur la fonte, montrèrent qu'effectivement ces écarts existent comme dans le cas de la flexion.

Est-on conduit, pour les représenter, à modifier de la même façon que pour la flexion, la loi de Hooke étendue aux déformations finies d'une fibre élémentaire ? On ne peut pas le dire *a priori*, car il se peut, en effet, que le mode de déformation intervenue, par une action particulière des fibres

(1) WESTON, *Phys. Rev.*, 8, 297 (1899).

(2) KOHLRAUSCH et GRÜNEISEN, *Berl. Ber.*, 1901, p. 1086.

(3) BACH, *Ver. d. Ing.*, 46, 1901.

(4) KUSAKABE, *Tokyo. K.*, 2, 142, 1904.

(5) J.-O. THOMPSON, *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 555 (1891).

(6) KYRILOFF, *Journal de la Soc. physicoch. russe*, t. XXXIV.

(7) MEYER, *Wied. Ann.*, 59, p. 668 (1896).

voisines de la fibre considérée, différente dans les deux cas ⁽¹⁾.

7. — Quelque complexes que soient, dans le cas de la flexion, les réactions des fibres les unes sur les autres (par suite de la contraction transversale, des conditions d'encastrement, etc...) il me semble qu'elles ne peuvent suffire à expliquer les faits observés, en particulier la forme relativement compliquée de l'action de la lame et surtout l'influence de la nature particulière du métal.

Il est extrêmement probable qu'il y a, en outre, une variation réelle et importante du module d'élasticité, avec la déformation.

8. — En résumé, la lame élastique de suspension provoque dans le mouvement du pendule des écarts à la loi d'isochronisme.

Ces écarts dépendent essentiellement de la nature du métal. Tout se passe comme si le module d'élasticité, que l'on considère comme constant dans la théorie élémentaire de la flexion, était fonction de la déformation de la lame. Des expériences d'équilibre de flexion montrent que la vitesse de la déformation n'intervient pas.

Pour une lame d'acier, le module décroît jusqu'à un minimum (qui correspond à une variation relative de l'ordre du $\frac{1}{100}$ et à une déformation relative de l'ordre du $\frac{1}{10.000}$), puis croît, à mesure que la déformation augmente.

Ce sont ces variations qui influencent le mouvement du pendule, de sorte que ce dernier nous apparaît encore comme un instrument très sensible pour l'étude des petites perturbations.

(1) Pour répondre à cette question, il aurait fallu faire des expériences comparées de flexion, traction et compression avec la même lame. Ces expériences délicates s'écartaient trop de l'objet de ce mémoire.

D'autres conclusions se dégagent de l'étude de l'influence du ressort de suspension.

Comme on ne sait pas, *a priori*, comment le module dépend de la déformation, on ne peut prévoir quel sera le mouvement du pendule. Si donc on veut l'employer comme régulateur très précis, une étude préalable de sa durée d'oscillation en fonction de l'amplitude s'impose. J'ai déjà indiqué, que seule, la méthode photographique avait, pour une telle étude, la souplesse nécessaire.

Enfin, les considérations précédentes peuvent trouver une application toutes les fois que l'on a affaire à l'élasticité de flexion d'un ressort, en particulier dans les recherches délicates sur le spiral réglant des chronomètres. Elles permettent de déterminer avec quelle approximation il est permis, comme on le fait habituellement, d'appliquer dans ces calculs la loi ordinaire de la flexion.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

I. — Considérations sur le choix d'une bonne suspension du pendule.

Comme application pratique des expériences sur l'influence de la suspension, je me propose d'exposer sommairement les considérations qui peuvent guider dans le choix de la meilleure suspension du pendule, employé dans des conditions déterminées.

Je laisserai de côté la suspension à soie qui n'est pas bien définie et n'est plus employée actuellement ; la discussion portera sur le couteau et la suspension à ressort.

Le problème est différent selon que l'on se propose d'employer le pendule :

- 1^o Aux mesures absolues de l'intensité de la pesanteur ;
- 2^o Aux mesures relatives de la pesanteur ;
- 3^o Comme étalon de temps, garde-temps ou régulateur des horloges.

I. — Dans les observations du pendule pour la mesure absolue de g , on s'est servi jusqu'ici, exclusivement, du couteau. Le problème est en effet, d'avoir un axe d'oscillation bien défini. Or le pendule à suspension élastique ne satisfait pas à cette condition : L'étude faite précédemment montre que son mouvement est très complexe et non conforme à ce que prévoit la théorie ordinaire. Tout se passe comme si le module d'élasticité était fonction de la déformation en sorte

que pour avoir quelque certitude dans la mesure, il serait absolument nécessaire de faire une étude préalable, approfondie, des propriétés élastiques du métal de la suspension et des variations à la loi d'isochronisme du pendule.

Bessel, dans ses expériences à Berlin et Königsberg s'est bien servi de la suspension élastique, mais il s'agissait d'une méthode différentielle ; il mesurait la différence des longueurs de deux pendules suspendus à la même lame flexible ; l'effet inconnu de cette lame s'éliminait.

Sauf dans le cas de méthodes différentielles, la suspension à ressort ne semble pas pouvoir être employée pour la mesure de la pesanteur.

Il reste le couteau, mais son emploi soulève également des difficultés ; nous les avons discutées en détail dans le chapitre II. Je rappelle que la conclusion, est qu'on ne peut tenir compte pour la correction du couteau, d'une forme particulière et rigide de l'arête, comme les différents expérimentateurs l'ont fait jusqu'ici. Le plan modifie la durée d'oscillation (surtout aux petites amplitudes) d'une façon qu'il est impossible de prévoir *a priori*, car elle dépend des conditions inconnues de contact entre le couteau et le plan.

Villarceau a proposé de remplacer le couteau, par un cylindre, de rayon facilement mesurable, mais il croyait à un effet purement géométrique (dû à la cylindricité très faible et très difficile à déterminer dans le cas du couteau) ; nous avons vu que le cylindre s'écrase sur le plan et qu'il en résulte un effet beaucoup plus grand que dans le cas du couteau.

On pourrait aussi avoir l'idée d'user l'arête du couteau de façon à réaliser une petite surface plane de largeur mesurable avec précision, et telle, qu'elle soit capable de supporter sans déformation le poids du pendule ; mais le centre d'oscillation ne serait pas mieux défini qu'avec une arête de couteau ; il serait difficile de faire coïncider exactement les deux surfaces planes, au repos, et le pendule s'écarterait beaucoup trop de la loi d'isochronisme.

Je signalerai enfin l'intéressante idée de M. G. Lippmann de faire reposer le couteau du pendule sur des roues très mobiles, comme l'axe de la poulie dans la machine d'Atwood. Si l'effet du glissement sur le plan est important, ce mode de suspension, qui le supprime, doit donner de bons résultats. Je l'ai réalisé ; l'oscillation du pendule, étudiée avec précision par la méthode photographique, a exactement les mêmes caractères que dans le cas d'un plan fixe ; l'effet du glissement est insensible

En fait, il ne semble pas possible d'améliorer la suspension à couteau. Elle donnera toujours des anomalies — souvent graves — analogues à celles qu'ont signalées tous les expérimentateurs qui l'ont utilisée, et aucune méthode particulière, même différentielle, ne pourra permettre d'éliminer son influence.

On peut cependant en tenir compte, comme nous l'avons déjà dit, mais il est nécessaire de déterminer avec précision la loi de la durée d'oscillation du pendule en fonction de l'amplitude. Il résulte de cette détermination une correction qui doit porter sur la durée d'oscillation observée aux petits arcs.

Sans cette étude préalable, l'emploi du couteau quelle que soit sa nature, ne présente pas de garantie suffisante, dans les recherches si délicates sur la longueur du pendule simple à secondes ⁽¹⁾.

II. — S'il s'agit de mesures relatives de l'intensité de la pesanteur, le problème est tout autre : La seule condition à réaliser exactement est celle de l'identité de l'oscillation du pendule aux différents lieux.

Avec le pendule à couteau, les observateurs ont souvent

⁽¹⁾ C'est à cause de cette difficulté et de toutes celles que soulève l'emploi du pendule que M. A. Guillet propose pour mesurer g une méthode basée sur le principe du tube de Newton. (*C. R. Ac. Sc.*, t. CLXV, p. 1050, 1917).

trouvé des différences sensibles dans le nombre d'oscillations par jour, au départ et à l'arrivée.

Il semble que, dans ce cas, la suspension élastique doive être préférée, mais évidemment à condition qu'un soin particulier soit pris pendant le transport et l'installation du pendule, pour assurer la constance de son état. Les considérations qui suivent sont alors applicables au choix de la lame.

III. — 1. — Dans l'emploi du pendule libre comme étalon de temps et garde-temps, ou du pendule entretenu comme régulateur des horloges, il faut obtenir la permanence des conditions du mouvement. Au moins quand il s'agit du pendule libre, la propriété d'isochronisme n'a aucune importance, mais il faut que pour une amplitude donnée et dans des conditions expérimentales bien définies, la durée d'oscillation du pendule soit exactement déterminée.

Ce caractère de permanence n'est certainement pas réalisé avec le couteau. A supposer même qu'on prenne soin de ne pas le déplacer sur son support, de façon qu'il oscille toujours sur les mêmes parties du plan, le couteau s'écrasera et se déformera jusqu'à ce que la surface de contact soit suffisante pour supporter le poids du pendule. A partir de ce moment, il n'y aura plus de déformation permanente, mais des déformations élastiques qui se feront sous des efforts voisins de ceux correspondant à la limite d'élasticité. Le métal, soumis à ces efforts considérables, s'écrasera et cette modification se traduira par une variation de l'action perturbatrice du support et, par suite, de la durée d'oscillation. Les expériences décrites sur les plans de laiton, ont mis en évidence des perturbations énormes de cette nature. Il ne viendra pas à l'esprit d'employer des plans de laiton, mais même avec des substances très dures, il y a à craindre l'influence d'une action mécanique intense et prolongée.

D'autre part, le couteau glisse, quoique faiblement sur son plan (Bessel, Defforges); il s'use donc continuellement et sa

surface de contact avec le plan se modifie constamment ; la durée d'oscillation du pendule ne peut rester constante.

2. — Examinons maintenant au même point de vue de la permanence de son état, la suspension élastique.

Quelles sont les modifications possibles de l'état de la lame. Comment les diminuer et rendre minimum leur effet sur le mouvement du pendule ?

Les causes de modification de la lame sont, d'une part les variations de température qui modifient ses dimensions et son élasticité, d'autre part, les déformations continues auxquelles elle est soumise qui changent son état moléculaire. Nous supposons la lame homogène et la suspension construite avec soin et bien fixe de façon à ce qu'il n'y ait pas de modification accidentelle.

3. — Cherchons *l'influence de la température* et les conditions à réaliser pour la rendre faible.

La formule approchée la plus simple, donnant la durée d'oscillation du pendule, est, avec les notations de la note III (formules (13)) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + Mh\lambda}{Mgh + \frac{Mg}{\omega sh\omega l}}}$$

$$\text{avec : } \lambda = l \left(1 - \frac{1}{\omega l} \operatorname{th} \frac{1}{2} \omega l \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{12} Ece^3$$

De l'étude de la marche des chronomètres, à différentes températures, il résulte que μ diminue quand la température s'élève, la variations relative de E étant plus grande (10 fois environ) que la somme des variations relatives des dimensions de la section transversale de la lame. Il s'ensuit que ω croît et que le couple exercé par la lame diminue quand la température s'élève. D'autre part comme ωl croît plus vite que $\operatorname{th} \frac{1}{2} \omega l$, λ augmente. Ces deux effets contribuent à augmenter la durée d'oscillation du pendule ; mais c'est le pre-

mier qui est de beaucoup le plus important avec les suspensions ordinaires.

On pourrait, pour les horloges de précision préconiser l'emploi d'un des alliages nouveaux, employés en chronométrie, de M. Ch. Ed. Guillaume, dont le module d'élasticité croît quand la température s'élève (l'influence de l'augmentation de longueur de la lame pouvant être ainsi compensé) mais il faudrait être bien certain que le métal est stable et ne se modifie pas avec le temps.

La meilleure solution du problème est évidemment celle qui est adoptée pour les horloges directrices dans les Observatoires : on place le régulateur dans une enceinte à température aussi constante que possible.

Quoi qu'il en soit, la variation de la durée d'oscillation, étant due principalement au changement d'élasticité de la lame, il y a intérêt à diminuer l'importance relative de l'action qu'exerce cette dernière par rapport à celle de la pesanteur.

4. — C'est encore cette conclusion qui s'impose évidemment, si l'on veut : d'une part rendre minimum l'influence des modifications possibles de l'état de la lame, dues à d'autres causes que la température : d'autre part diminuer l'effet du frottement intérieur du métal au point de vue de l'amortissement des oscillations.

Le rapport du couple exercé par la lame à celui de la pesanteur a pour valeur : $\frac{1}{\omega h s h \omega l}$; on peut le rendre très petit, en choisissant une lame de très faible épaisseur, mais nous verrons plus loin qu'il est nécessaire de fixer une valeur minimum pour l'épaisseur de la lame. Cette épaisseur étant adoptée, il faut prendre une longueur suffisante pour que le rapport considéré soit très petit, mais comme ce rapport décroît très vite quand la longueur de la lame augmente, il n'y a pas intérêt à prendre une longueur trop grande (la dilatation de la lame pouvant avoir des inconvénients).

Un exemple fixera les idées : prenons un pendule de 5 kg. pour lequel $h = 80$ cm. et suspendons-le à une lame d'acier, de 1 cm. de largeur, et 0 mm. 1 d'épaisseur ; le rapport des couples est donné, en fonction de la longueur de la lame par le tableau suivant :

Longueur l	$\frac{1}{\omega h s \omega l}$
1 mm.	0,00405
2 —	0,00176
5 —	0,00030
10 —	0,00002

L'action de la lame devient très petite à partir d'une certaine longueur ; les variations toujours faibles de cette action seront sans effet sensible sur le mouvement du pendule. Il n'y a pas intérêt à choisir, dans l'exemple actuel, une longueur supérieure à 1 cm.

Comme c'est la courbure de la lame qui détermine le couple qu'elle exerce sur le pendule, la conclusion précédente est en rapport avec le fait suivant : la courbure, maximum au point d'encastrement supérieur, diminue rapidement à mesure qu'on s'éloigne de ce point.

Dans l'exemple précédent, au point déterminé par une longueur d'arc de la lame de 1 cm. on trouve que la courbure n'est plus que le $\frac{1}{200}$ de la courbure au point d'encastrement.

La courbure, comme le couple, ne subit plus de variation sensible à partir d'une certaine longueur.

Cette longueur qu'il est inutile de dépasser est d'ailleurs d'autant plus petite que la lame est plus flexible ; mais avec une lame très flexible la variation totale de la courbure se trouve localisée sur une longueur petite et il peut y avoir en ce point une déformation trop importante du métal.

Nous sommes ainsi amenés à étudier, comme condition nous imposant le choix d'une épaisseur minimum, les limites nécessaires de la déformation du métal.

5. — *Fatigue de la lame.* — Par suite de ses déformations continuelles, le métal de la lame peut s'altérer. Il se peut même que les déformations ne soient pas élastiques, mais permanentes et forcées alternativement dans un sens et dans l'autre. Le métal subit alors des modifications importantes.

Nous pouvons admettre que cette fatigue du métal est proportionnelle à la grandeur de la déformation. Or cette déformation n'est pas la même aux différents points de la lame et pour les différentes fibres. Elle est maximum pour les fibres externes et au point d'encastrement supérieur.

Un petit élément de longueur ε , situé sur la surface de la lame à la distance $\frac{e}{2}$ de la fibre neutre, subit par suite de la courbure de la lame une déformation relative :

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{e}{\rho}$$

ρ étant le rayon de courbure de cet élément.

La déformation relative est, maximum pour $s = 0$ et elle a pour valeur approchée :

$$\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}\right)_0 = \frac{1}{2} e \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2} \frac{e \omega \theta}{th. \omega l}$$

Cela se déduit des formules de la note III.

Il faut ajouter à cette déformation, celle qui résulte, pour toutes les fibres, de la traction (sensiblement Mg) exercée par le pendule. Soit c la largeur de la lame ; nous prenons, d'après les considérations précédentes une valeur assez grande de ωl , en sorte qu'on peut faire $th \omega l = 1$; en remplaçant ω par sa valeur $\sqrt{\frac{12 Mg}{E e c^3}}$ il vient :

$$\left(\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}\right)_0 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Mg}{c \cdot e} + \sqrt{\frac{3 Mg}{E \cdot c \cdot e}} \cdot \theta$$

Or, on admet qu'une déformation, pour rester élastique, ne doit pas dépasser $\frac{1}{1000}$ en valeur relative.

Cherchons à quelle condition chacun des termes de l'expression précédente ne dépasse pas $\frac{1}{2000}$ par exemple, en supposant un pendule de 5 kilogrammes et en admettant comme module d'Young de l'acier : 20.000 kilogrammes par mm^2 .

On trouve pour le 1^{er} terme, que la section de la lame doit être supérieure à $\frac{1}{2} \text{ mm}^2$. Pour le deuxième terme, en admettant une amplitude maximum de $\frac{2}{100}$ radian, la section doit être supérieure à 1 mm^2 .

La largeur de la lame sera prise de l'ordre de 1 cm. (elle ne doit être ni trop petite à cause des mouvements de torsion possibles, ni trop grande pour une raison de difficulté de construction et une répartition aussi uniforme que possible de l'effort du pendule). On voit alors que l'épaisseur de la lame devra être d'environ $\frac{1}{10} \text{ mm}$.

Si on veut être certain d'éviter les déformations permanentes, il sera prudent de ne pas descendre au-dessous de cette valeur. C'est d'ailleurs l'épaisseur moyenne ordinairement adoptée par les constructeurs, pour les suspensions d'horloges de précision à seconde.

6. — Résumons la marche à suivre pour l'établissement d'un projet de suspension.

En posant comme condition, que la déformation relative maximum ne doit pas dépasser $\frac{1}{1000}$ on détermine la section minimum transversale de la lame; la largeur étant admise de l'ordre de 1 cm., on en déduit l'épaisseur. Enfin la longueur de la lame est prise assez grande, de telle sorte que le couple élastique soit faible; il est inutile de dépasser une certaine longueur, on peut par exemple limiter la lame au point où la courbure est devenue le $\frac{1}{100}$ de sa valeur au point d'encastrement.

Je rappelle les dimensions de la lame d'acier trouvées d'après ces principes dans le cas d'un pendule à seconde de 5 kilogrammes.

Longueur	1 cm.
Largeur	1 cm.
Epaisseur	$\frac{1}{10}$ mm.

Une telle lame n'exerce sur le pendule qu'un couple très faible, le $\frac{1}{50000}$ de celui qu'exerce la pesanteur. Les causes de variation de l'état de la lame n'influenceront pas sensiblement le mouvement du pendule.

Dans les limites d'amplitude ordinairement admises (jusqu'à 0,03 radian) les variations d'isochronisme produites par cette lame ne sont que de l'ordre du $\frac{1}{100.000}$ sec. Elle ne compensent qu'en partie l'erreur circulaire, mais comme nous l'avons vu, cela n'a aucune importance dans la pratique.

7. *Remarque.* — Les horlogers français emploient de préférence des lames courtes, sous l'influence des idées de Laugier et Winnerl. Keelhoff (*Revue Suisse d'horlogerie*, septembre 1905, page 86), préconise aussi un ressort de suspension aussi court que possible.

Toutes les considérations qui précèdent nous font voir au contraire, les avantages de ressorts relativement longs (de l'ordre de 1 cm. de longueur) : Faible couple moteur de la lame, et par suite influence minimum des perturbations, petites variations d'isochronisme, enfin influence relativement faible de la lame sur la décroissance de l'amplitude (voir note III. 8).

8. — Nous avons dit que la largeur convenable de la lame est de l'ordre de 1 cm. Est-il recommandable d'utiliser deux lames de même largeur, séparées par un certain intervalle, comme l'usage s'en est établi dans la pratique courante?

Le but de cette disposition est d'éviter les mouvements de torsion sans avoir à prendre une lame trop large.

Il ne semble y avoir que des inconvénients à utiliser deux lames : Elles ne sont en effet jamais rigoureusement identiques au point de vue de leurs qualités mécaniques, ne

serait-ce que par suite des modifications qu'elles subissent au moment de l'exécution de la suspension. Par suite, les deux lames ne travailleront pas de la même façon, elles pourront se gêner mutuellement et prendre des mouvements forcés ayant une influence fâcheuse sur le mouvement du pendule. C'est à cause de cet inconvénient possible que j'ai toujours utilisé une lame unique, dans mes expériences.

D'ailleurs quelques constructeurs horlogers n'utilisent que des suspensions à une seule lame.

L'inconvénient qui pourrait résulter d'un mouvement de torsion n'est d'ailleurs pas très grand, car pour une lame de 1 cm. de largeur il reste toujours petit. Je me suis assuré, par des expériences précises, que ce petit mouvement de torsion n'avait aucune influence sensible sur le mouvement du pendule.

9. — *La condition de permanence dans le caractère de l'oscillation est-elle réalisée pratiquement?*

Pour répondre à cette question j'ai fait osciller tous les jours pendant plusieurs mois, le pendule dont j'ai étudié les variations d'isochronisme au début du chapitre III (Pendule de 2 kilogrammes, lame de 2 cm. 5 de longueur et 0 mm. 2 d'épaisseur).

Au début, j'ai observé des variations anormales qui ne pouvaient pas être attribuées aux légers changements de la température, dans la cave où avaient lieu les expériences. Mais ces variations ont assez rapidement disparu et le pendule s'est montré remarquablement constant.

En tenant compte des petits changements de température d'une expérience à l'autre, j'ai pu constater la constance de la durée d'oscillation à 10^{-6} près. Je rappelle qu'avec le pendule à couteau les variations atteignaient 10^{-5} .

Le fait que la durée d'oscillation ne prend pas immédiatement une valeur définie est bien connu des horlogers. Les meilleures horloges astronomiques étant mises en place, on observe au début, des variations de leur marche. Ces

anomalies tiennent évidemment aux déformations moléculaires subies par la lame au moment de la construction et de l'essai de la suspension. Avant d'atteindre un état stable, le métal doit subir des modifications fréquentes (dues à la déformation ou aux variations de température), dans un sens et dans l'autre. L'expérience montre qu'au bout d'un temps plus ou moins long l'accommodation a lieu : le métal prend un état moléculaire bien défini, les déformations sont purement élastiques, et le caractère de permanence des conditions d'oscillation du pendule est réalisé.

En résumé la suspension à lame, déterminée par les considérations qui précèdent, a une supériorité très nette sur la suspension à couteau, dans l'emploi du pendule comme régulateur des horloges ou comme étalon de temps.

II. — Application de la méthode photographique. Le pendule libre étalon de temps.

L'horloge astronomique de précision est un instrument excellent, puisque, malgré les chocs continuels qui à chaque seconde, donnent l'impulsion d'entretien au régulateur, elle a une variation de marche par jour, qui n'est que de l'ordre du $\frac{1}{100}$ de seconde (soit une précision de 10^{-7}).

Cependant, cette marche n'est si remarquable que parce qu'il s'établit dans la série des oscillations, des compensations entre les perturbations, et c'est un fait connu que la seconde de l'horloge à un instant donné, isolée des autres, est beaucoup moins exacte que la seconde moyenne, déduite de l'ensemble des oscillations. L'horloge ne peut donc servir à la détermination très précise d'un intervalle de temps de l'ordre de la seconde ou de la minute.

Au contraire, le pendule libre, qui oscille toujours dans des conditions bien définies et ne reçoit aucune action extérieure, est particulièrement propre à être utilisé dans ce but.

Mais il faut connaître parfaitement son mouvement, et en particulier la loi de la durée de son oscillation en fonction de l'amplitude à mesure qu'il s'amortit.

Dans le présent travail nous avons vu comment la méthode photographique permet cette étude d'une façon commode, rapide et très précise. Et une telle étude est indispensable. De là l'intérêt des méthodes et expériences analogues à celles que nous avons exposées.

Le pendule libre, étalon de temps, oscillant dans des conditions constantes de température et de pression, serait comparé d'une part à l'horloge astronomique, d'autre part à l'intervalle de temps à mesurer. Cet intervalle de temps s'inscrirait directement sur le pendule et nous avons vu que le caractère parfaitement harmonique du mouvement permettrait une détermination très précise de la fraction d'oscillation (au $\frac{1}{10,000}$ seconde). L'isochronisme rigoureux des oscillations n'est pas nécessaire ; ce qui importe, c'est que les conditions de l'oscillation à une amplitude donnée restent les mêmes.

Le pendule devrait être long et lourd, osciller sous une amplitude assez grande (voir note I-2, p. 177) et avoir une suspension élastique (ressort long et de faible épaisseur) ⁽¹⁾.

III. — Le pendule libre, garde-temps.

Quand les observations des astres ne sont pas possibles, c'est l'horloge qui « garde le temps » mais les erreurs de marche, si petites qu'elles soient, s'ajoutent tous les jours et

(1) Plusieurs auteurs ont déjà préconisé le pendule libre comme étalon de temps ; par exemple MENDENHALL [*The American journal of Science*, t. XLII (1892)]. Mais le problème nous paraît dépendre intimement de l'emploi d'une méthode photographique de comparaison.

finissent par faire une erreur sensible. Il y a un intérêt évident à réaliser un garde-temps dont la variation de marche soit aussi petite que possible.

On peut constituer un garde-temps par l'ensemble de deux pendules libres A et B à température et pression constantes et soustraits à toute influence perturbatrice extérieure.

Lançons le pendule A, il oscille pendant un certain temps et s'amortit. Avant qu'il ne soit revenu au repos, lançons le pendule B, et ainsi de suite (fig. 24).

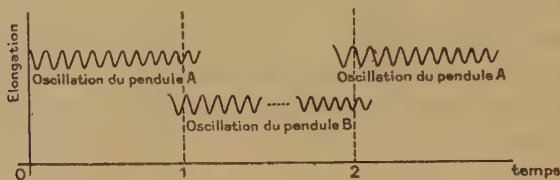


Fig. 24.

L'ensemble des deux pendules constituera un garde-temps, si nous savons les relier l'un à l'autre dans le temps. La méthode photographique permet de le faire.

Avant que le pendule A ne soit trop amorti et quand B a été lancé, faisons éclater une étincelle électrique (1) en face des deux pendules et photographions leur amplitude par la technique indiquée, nous pouvons déterminer à $\frac{1}{10.000}$ seconde près les phases respectives simultanées de A et B. De même quand B est amorti, nous le relions à A qui a été lancé à nouveau en faisant éclater une autre étincelle (2). Par suite, tout se passe comme si nous avions un pendule non amorti, et ne subissant qu'une fois en plusieurs heures une petite perturbation susceptible de faire varier sa phase de $\frac{1}{10.000}$ de seconde. On voit la supériorité de cette combinaison de deux pendules sur l'horloge astronomique garde-temps.

Les étincelles (1) et (2) seraient commandés automatiquement, par une horloge de précision à l'aide d'un appareil synchronisé comme ceux qui servent à l'envoi automatique de signaux de T. S. F. Elles éclateraient à une seconde connue de l'horloge (et par conséquent des pendules) et l'inscription de l'instant correspondant se ferait à la fois sur l'horloge et les pendules. Ainsi la comparaison entre ces instruments serait directe.

Comme l'horloge est elle-même réglée sur les astres, il en résulterait une comparaison entre les pendules et le mouvement des astres. On pourrait aussi concevoir une inscription directe sur les pendules, de l'instant du passage d'un astre au méridien.

Une série suffisamment longue d'observations amènerait à une connaissance très précise de l'oscillation des deux pendules. Ici encore, peu importe que les oscillations des pendules soient ou non isochrones ; il suffit que la liaison par l'étincelle ait lieu au cours d'oscillations pour lesquelles les amplitudes sont très bien déterminées et toujours les mêmes. La fraction de seconde au moment de l'étincelle peut alors se déduire de la durée d'oscillation correspondant à cette amplitude, avec une très grande précision.

Pour arriver à cette constance dans les conditions du mouvement du système, il faut que le lancement soit automatique, commandé par l'horloge directrice qui déclanche l'étincelle, par exemple. Le dispositif de lancement est facile à imaginer. D'autre part, ce n'est qu'assez longtemps après le lancement du pendule et lorsqu'il serait complètement soustrait à la perturbation initiale, que l'étincelle serait produite. De cette façon on disposerait bien de deux pendules réellement libres.

En somme, il s'agit d'horloges astronomiques, sans échappement, et sans mécanisme d'inscription de l'heure. Le temps doit être défini avec le maximum de sécurité.

Mais la réalisation de ce garde-temps ne peut se faire sans

une étude minutieuse des conditions dans lesquelles il serait nécessaire de placer les pendules libres, pour que les variations de température, de pression, etc..., n'apportent qu'un trouble de l'ordre de grandeur de l'erreur d'observation ou de liaison des pendules.

Il s'agit d'une erreur de $\frac{1}{10.000}$ de seconde ; avec des pendules marchant 12 heures dans le vide, on n'aurait théoriquement qu'une erreur de marche de l'ordre de une seconde en 10 ans. Même s'il était possible de placer les pendules dans des conditions assez constantes, pour espérer réaliser une telle précision, il est probable que des influences accidentelles (mouvements de l'écorce terrestre, variations dans la nature du métal de la suspension, etc...) viendraient la limiter. Quoi qu'il en soit, il y a peut-être là une voie nouvelle pour la détermination plus précise de la seconde et pour l'étude de ses variations.

On a discuté en effet sur les causes d'une possibilité de variation dans la durée du mouvement de rotation terrestre et sur la grandeur de cette variation ⁽¹⁾. S'il était possible de constituer un garde-temps extrêmement précis sur le principe que je viens d'exposer, on aurait peut-être un moyen de constater que l'unité de temps actuelle n'est pas fixe. Et on chercherait sans doute à modifier — par l'emploi du pendule libre — la définition de la seconde, de la même manière que l'on a été amené à changer celle du mètre et du kilogramme. ⁽²⁾

⁽¹⁾ THOMSON et TAIT. *Treatise of Natural philosophy*, vol. I, part. I, p. 460 ; GLAUERT. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, t. LXXV, p. 489 (1915).

⁽²⁾ M. Jules Baillaud, de l'Observatoire de Paris, a eu une idée analogue à celle que je viens d'exposer. Nos projets ne diffèrent sensiblement que par la méthode d'observation des pendules.

Il est avantageux que les pendules A et B soient identiques ; dans ce cas la méthode des coïncidences ne peut être employée

IV. — Application de la méthode photographique à la détermination des longitudes.

Il ne s'agit encore ici que d'une application possible.

Une même onde de T. S. F. émise en un poste central, ferait éclater simultanément en chacun des lieux A et B une étincelle, devant le balancier d'une horloge réglée sur l'heure locale. On en déduirait les heures au même instant dans les stations A et B et par suite la différence de longitude entre ces stations. Ce serait en somme la méthode la plus directe pour la mesure des longitudes.

Comme pour l'exposé précédent, je ne pourrais que décrire des dispositifs qui n'ont pas encore été réalisés, et sont par suite, pour l'instant, sans intérêt. Je ne développerai donc pas ce sujet.

directement. Il ne me paraît pas douteux que la méthode photographique s'impose, ici, pour la liaison immédiate et directe des pendules entre eux et avec le mouvement des astres.

NOTE I

Sur le mouvement d'un système oscillant, troublé par une action perturbatrice.

1. — On sait que si l'on projette sur deux axes rectangulaires Ox et Oy , le vecteur de longueur constante $OM = \theta_0$ tournant avec une vitesse angulaire constante ω , ses projections, à l'instant t (alors que ce vecteur fait l'angle ωt avec Ox) représentent :

Sur Ox , l'élongation : $\theta = \theta_0 \cos \omega t$,

Sur Oy , la quantité $-\frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \sin \omega t$, proportionnelle à la vitesse du mouvement défini par l'équation pendulaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0.$$

Supposons que le mouvement harmonique ainsi défini soit troublé par une action perturbatrice quelconque, fonction du temps. On pourra écrire :

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = F,$$

F étant une fonction connue du temps, de l'élongation ou de la vitesse.

Admettons que l'action perturbatrice ait commencé à agir (au temps $t = 0$) alors que M coïncidait avec M_0 sur l'axe Ox , et proposons-nous de chercher comment est modifiée la position du mobile représentatif (de coordonnées θ , $-\frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt}$).

Soit M_1 la position du mobile à l'instant t (fig. 25). Projections le point M_1 en P sur le rayon vecteur OMx' et en Q sur la tangente My' à la circonférence, en M — on a :

$$(2) \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t + MP \cos \omega t - MQ \sin \omega t.$$

Calculons MP . Pour cela, considérons la position du point représentatif en M'_1 à l'instant $t + dt$; le vecteur Ox' a tourné

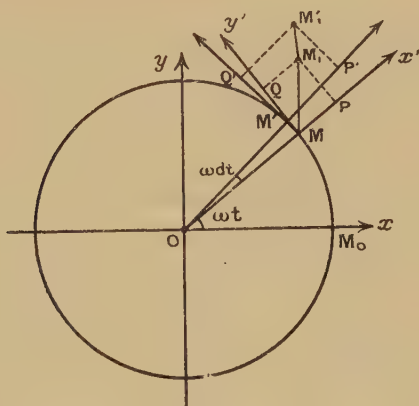


Fig. 25.

de l'angle ωdt et la projection de M'_1 sur ce vecteur est maintenant P' . Les coordonnées de M'_1 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta + d\theta \\ -\frac{1}{\omega} \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2} dt \right) = -\frac{1}{\omega} \left[\frac{d\theta}{dt} + (F - \omega^2\theta) dt \right]. \end{array} \right.$$

On a :

$$OP = \theta \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt} \sin \omega t$$

$$OP' = (\theta + d\theta) \cos \omega(t + dt) - \frac{1}{\omega} \left[\frac{d\theta}{dt} + (F - \omega^2\theta) dt \right] \sin \omega(t + dt).$$

Mais :

$$\begin{aligned} \cos \omega(t + dt) &= \cos \omega t - \omega \sin \omega t dt, \\ \sin \omega(t + dt) &= \sin \omega t + \omega \cos \omega t dt, \end{aligned}$$

d'où :

$$OP' - OP = -\frac{1}{\omega} F \sin \omega t \, dt.$$

Ainsi la vitesse de la projection P du point M_1 sur l'axe mobile Ox' est :

$$-\frac{1}{\omega} F \sin \omega t.$$

On trouverait de façon analogue, que la vitesse de la projection Q de M_1 sur l'axe Oy' est :

$$-\frac{1}{\omega} F \cos \omega t.$$

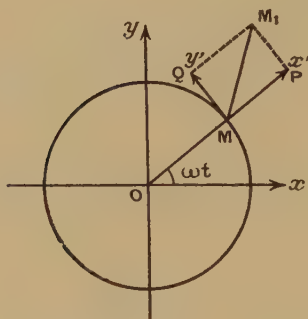


Fig. 26.

Le point représentatif du mouvement perturbé (de coordonnées $\theta, -\frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt}$) s'obtiendra donc, à l'instant t , en traçant l'axe OMx' (fig. 26) faisant avec Ox l'angle ωt , l'axe My' à angle droit avec le premier, en portant à partir du point M :

$$\text{Sur } Ox' \text{ la longueur } \overline{MP} = -\int_0^t \frac{F}{\omega} \sin \omega t \, dt$$

$$\text{Sur } Oy' \text{ la longueur } \overline{MQ} = -\int_0^t \frac{F}{\omega} \cos \omega t \, dt$$

et en construisant un rectangle sur ces deux longueurs. Il y a là une représentation simple du mouvement harmonique troublé, dans le cas où F est une fonction connue du temps. On remarque que ce mouvement ne dépend que des deux fonctions perturbatrices :

$$\int_0^t F \sin \omega t \, dt, \quad \int_0^t F \cos \omega t \, dt.$$

Elongation à l'instant t . — Remplaçons dans la formule (2), MP et MQ par les valeurs que nous venons de trouver. Il vient :

$$(3) \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\sin \omega t \int_0^t F \cos \omega t \, dt - \cos \omega t \int_0^t F \sin \omega t \, dt \right)$$

Vitesse à l'instant t . — On trouve :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega \sin \omega t + \left(\cos \omega t \int_0^t F \cos \omega t \, dt + \sin \omega t \int_0^t F \sin \omega t \, dt \right)$$

Ces formules sont commodes dans beaucoup de cas. Elles permettent de déterminer le mouvement perturbé, par le calcul de deux intégrales définies.

Ce sont d'ailleurs des formules classiques d'analyse ; on les obtient par la méthode de la variation des constantes appliquée à l'équation différentielle du mouvement. J'ai donné la démonstration précédente que je crois nouvelle, parce qu'elle me semble plus intuitive.

Dans les applications physiques, F correspondra le plus souvent à une action perturbatrice petite. Le mouvement sera peu troublé, en sorte que dans les termes correctifs de θ et $\frac{d\theta}{dt}$, on pourra prendre pour F une expression approchée. Par exemple, si F est une fonction déterminée de t et $\frac{d\theta}{dt}$ on prendra pour ces quantités les valeurs de première approximation (pour lesquelles $F = 0$) :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \cos \omega t \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\omega} \theta_0 \sin \omega t \end{cases}$$

F deviendra ainsi une fonction connue du temps, ce qui permettra le calcul des intégrales définies.

Le plus souvent aussi, F sera une *fonction périodique* de période égale à celle du mouvement pendulaire considéré. On pourra alors utiliser un développement en série de Fourier et simplifier le calcul, en considérant que les périodes du

mouvement harmonique et du mouvement troublé sont toujours très voisines.

Je ne peux faire ici que signaler l'intérêt des formules précédentes, pour des études physiques. Il me reste à en déduire immédiatement quelques expressions utiles pour les calculs.

2. — *Variation de la durée d'oscillation produite par la force perturbatrice.* — Imaginons deux pendules ; l'un non troublé, a un mouvement harmonique de période T , l'autre troublé par une force perturbatrice, a un mouvement défini par l'équation (1) et sa période est $T + \Delta T$. Nous voulons calculer ΔT dans l'hypothèse d'une *force perturbatrice petite*.

Conservons les conditions initiales précédentes. Lançons en même temps les deux pendules, et fixons les elongations du deuxième aux instants où le premier passe à deux reprises successives par sa position d'équilibre. Ces époques sont séparées par l'intervalle de temps T , et sont telles que :

$$\begin{aligned}\cos \omega t &= 0, \\ \sin \omega t &= 1,\end{aligned}$$

Il résulte de la formule (3) que dans l'intervalle de la première période le décalage de phase des pendules a augmenté de la quantité :

$$\Delta \theta = \frac{1}{\omega} \int_0^T F \cos \omega t \, dt.$$

La vitesse du pendule au voisinage de la position d'équilibre étant $\theta_0 \omega$, ce décalage correspond à une augmentation de durée égale à :

$$\Delta T = \frac{1}{\theta_0 \omega^2} \int_0^T F \cos \omega t \, dt.$$

Comme F est une quantité très petite, on pourra considérer T comme étant la période du mouvement perturbé ou non perturbé.

Cette formule a été trouvée par des voies diverses (et diffé-

rentes de la précédente) par la plupart des auteurs ⁽¹⁾ qui ont étudié le mouvement du pendule. Je l'utilise dans les calculs qui suivent.

Elle est très commode. On voit par exemple, de façon immédiate, que la perturbation produite dans la durée d'oscillation d'un pendule, par une force indépendante de l'amplitude (un choc, par exemple) sera, en raison inverse : de l'amplitude, du poids, et de la distance de l'axe au centre de gravité du pendule.

3. — *Variation de l'amplitude.* — Fixons la position du deuxième pendule à deux instants successifs 0 et T où le premier a une vitesse nulle du même côté de sa position d'équilibre. Cela a lieu pour :

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= 0 \\ \cos \omega t &= 1\end{aligned}$$

et les élongations du deuxième pendule sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \text{ au temps } 0 \\ \theta_1 = \theta_0 - \frac{1}{\omega} \int_0^T F \sin \omega t \, dt, \text{ au temps } T, \end{array} \right.$$

d'où :

$$\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0 = - \frac{1}{\omega} \int_0^T F \sin \omega t \, dt.$$

θ_0 et θ_1 sont bien les amplitudes successives du pendule perturbé car les deux pendules ayant par hypothèse des périodes très peu différentes, le deuxième a une vitesse nulle presque en même temps que le premier.

⁽¹⁾ La première démonstration est due, je crois, à AIRY. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. III, p. 105 (1827).

NOTE II

Sur le mouvement d'un pendule suspendu à un cylindre.
Influence des grands arcs d'oscillation et du frottement de roulement (constant et opposé au mouvement).

1. — Considérons un cylindre de rayon r auquel est suspendu un pendule, de masse M , roulant sur un plan horizontal. Nous cherchons le mouvement du système en supposant que le plan lui oppose une certaine résistance.

On sait de quelle façon on tient compte ordinairement de ce frottement de roulement. L'action du support sur le cylindre a une composante normale $\mathfrak{N}$ et une composante tangentielle $\mathfrak{T}$. Si cette force était appliquée au point de contact P du cylindre et du plan, son moment serait nul puisque le centre instantané de rotation est le point P lui-même (fig. 27).

On doit donc supposer que, par suite du défaut de rigidité du cylindre et du plan, le contact se fait, non sur une génératrice, mais suivant une petite surface. Alors on peut

supposer le point d'application A de la réaction du plan, à l'intérieur de cette petite surface, il en résulte que cette force a le moment $\mathfrak{N}\delta$ (en posant $\delta = PA$), moment par lequel elle s'oppose au mouvement du système. D'autre part, on doit considérer δ comme ayant le signe contraire de la vitesse.

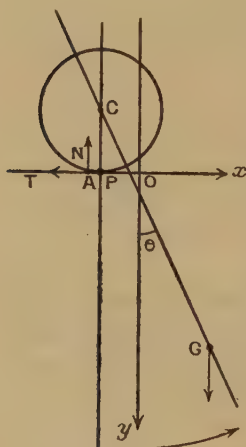


Fig. 27.

Ecrivons les équations du mouvement, en appelant θ l'angle de l'axe CG du pendule avec la verticale, et en prenant pour axe Ox l'intersection du plan d'oscillation du pendule et du plan de suspension, et pour axe Oy la verticale correspondant à la position d'équilibre du pendule.

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \mathfrak{C} \\ M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = Mg - \mathfrak{X} \\ M \rho^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \mathfrak{X} [\delta + (h+r) \sin \theta] + \mathfrak{C} y_0 \end{array} \right. \quad (1)$$

x_0 et y_0 sont les coordonnées du centre de gravité G.

ρ est le rayon de gyration du pendule.

Si h est la distance de G au cylindre, on a :

$$\begin{aligned} x_0 &= -r\theta + (h+r) \sin \theta \\ y_0 &= (h+r) \cos \theta - r \end{aligned}$$

En éliminant $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{C}$ à l'aide des deux premières équations (1), et en remplaçant x_0 , y_0 par leur valeur, on obtient l'équation du mouvement :

$$\left\{ (\rho^2 + h^2) + (h+r)[2r - 2r \cos \theta + \delta \sin \theta] \right\} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (h+r)[r \sin \theta + \delta \cos \theta] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g(h+r) \sin \theta + \delta \cdot g = 0$$

2. — *Calcul de la durée d'oscillation.* — 1° *Oscillations infiniment petites.* — Faisons $\cos \theta = 1$ $\sin \theta = \theta$ l'équation devient :

$$(\rho^2 + h^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g(h+r)\theta - \delta \cdot g$$

et l'on voit que tout se passe au point de vue de la durée d'oscillation comme si, l'intensité de la pesanteur avait été multipliée par le facteur $1 + \frac{r}{h}$.

Si T_1 est la durée de l'oscillation autour de la génératrice de contact, on a, r étant petit devant h :

$$T = T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{h} \right)$$

Dans le cas d'oscillation de très petite amplitude, le frottement agit comme une force constante opposée à la vitesse. Il ne modifie pas la durée des oscillations, mais agit sur l'amplitude qu'il fait décroître en progression arithmétique.

2^o *Influence des grands arcs d'oscillation.* — Séparons les termes dus à l'effet géométrique de ceux dus au frottement, dans l'équation générale du mouvement. D'autre part, posons :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

et ne conservons que les termes du troisième ordre en θ ; il vient :

$$(\rho^2 + h^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + ar \left[\theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + ag \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) + \delta \left[g + a\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = 0$$

en posant $a = h + r$.

Il est inutile d'intégrer cette équation. Nous savons (note précédente) que si on peut mettre l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = F$$

F étant une petite correction, la variation de période par rapport à celle du mouvement harmonique pour lequel $F = 0$ est donnée par :

$$\Delta T = \frac{1}{\theta_0 \omega^2} \int_0^T F \cos \omega t dt$$

a) *Termes indépendants de δ .* — Remplaçons dans ces termes θ par $\theta_0 \cos \omega t$ et appliquons la formule précédente, nous obtenons très facilement :

$$(\Delta T)_1 = \frac{\theta_0^2}{16} T + \frac{\pi^2 r}{gT} \cdot \theta_0^2$$

le premier de ces deux termes est la correction ordinaire d'amplitude. Quant au deuxième, il est très petit.

Calculons, par exemple, sa valeur dans le cas d'un pendule battant la seconde, suspendu à un cylindre de 1 cm. de rayon pour une amplitude de $\frac{3}{100}$ de radian, nous trouvons une variation de durée de 5 millionièmes de seconde.

b) Termes de frottement. — Ils donnent comme variation de période :

$$(\Delta T)_2 = -\frac{1}{ag\theta_0} \int_0^T \delta \left[g + a\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cos \omega t dt$$

Ici doit intervenir l'hypothèse qu'on peut faire sur δ .

1° Supposons que δ soit constant (c'est-à-dire indépendant de la pression normale qui d'ailleurs ne varie pas beaucoup pendant le mouvement). Alors, en faisant attention que δ change de signe avec la vitesse, on voit que $(\Delta T)_2$ est nul.

Donc dans cette première hypothèse, même aux grands arcs d'oscillation, le frottement n'a aucune influence sur la durée.

2° Supposons que δ soit fonction de la pression normale et posons :

$$\delta = A\mathfrak{U}^n$$

En se reportant à l'équation qui donne $\mathfrak{U}$ et en considérant que sa partie variable est très petite, on obtient :

$$\delta = AMg \left[1 - \frac{pa}{g} \omega^2 \theta_0^2 \cos 2\omega t \right]$$

Et en portant cette expression de δ dans $(\Delta T)_2$, on trouve encore une valeur nulle.

Ainsi, même aux grandes amplitudes et même en supposant δ fonction de la pression normale, *le frottement de roulement ordinaire n'agit pas sur la durée d'oscillation du pendule.*

3. — *Calcul de l'amortissement.* — L'oscillation ayant l'amplitude θ_0 il se produit une décroissance $\Delta\theta$ pendant le cours d'une oscillation et on a :

$$\Delta\theta = -\frac{1}{\omega} \int_0^T F \sin \omega t dt$$

Si on opère comme précédemment, on trouve les résultats suivants :

1° Les termes indépendants de δ donnent un amortissement nul (ce qui était évident *a priori*).

2° Si δ est constant (et changeant de signe avec la vitesse), on obtient :

$$\Delta\theta = -\frac{4\delta}{a} - \frac{4}{3} \frac{a\delta\theta_0^2}{\rho^2 + h^2}$$

3° Si δ est fonction de la pression normale d'après la formule $\mathfrak{K}^p$, on trouve :

$$\Delta\theta = -\frac{4\delta}{a} - \frac{4}{3} (1+p) \frac{a\delta\theta_0^2}{\rho^2 + h^2}$$

L'amortissement doit se faire dans tous les cas très sensiblement en progression arithmétique.

NOTE III

Etude théorique du mouvement d'un pendule suspendu par une lame élastique (Amplitude infiniment petite)

1. — Soit O le point d'encastrement de la lame dans le support du pendule. Au repos, le plan de la lame passe par le centre de gravité G du pendule.

A un instant quelconque de son mouvement, la position du système sera définie par rapport aux axes (l'un Ox horizontal, l'autre Oy vertical), par les coordonnées, a, b , du point d'encastrement inférieur A et par l'angle θ que l'axe du pendule fait avec la verticale.

Soit M, la masse du pendule devant laquelle nous négligeons la masse de la lame et l son moment d'inertie par rapport au point A. Posons $AG = h$.

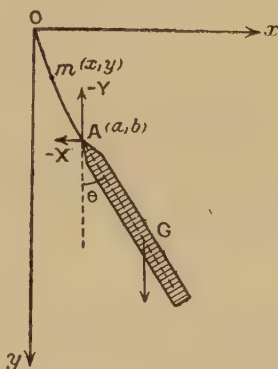


Fig. 28.

Le pendule exerce sur le ressort, en A, les forces X, Y et le couple C qui sont des fonctions à déterminer des paramètres a, b, θ . Ecrivons d'abord que le pendule est libre sous l'action des forces $Mg, -X, -Y$, du couple $-C$ et des forces d'inerties.

En appliquant les principes fondamentaux de la mécanique, il vient immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 a}{dt^2} + M \left[h \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - h \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + X = 0 \\ M \frac{d^2 b}{dt^2} - M \left[h \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + h \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - Mg + Y = 0 \\ I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + Mh \cos \theta \frac{d^2 a}{dt^2} - Mh \sin \theta \frac{d^2 b}{dt^2} + Mgh \sin \theta + C = 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit maintenant de déterminer X , Y , et C en fonction de a , b , et θ en utilisant les lois de l'élasticité des ressorts.

Soit m , un point quelconque du ressort, de coordonnées x , y ; soit d'autre part, φ l'angle de la tangente à la courbe du ressort avec la verticale, s la longueur de l'arc Om du ressort et l sa longueur totale. La loi élémentaire de la flexion plane exprime que *la courbure en un point quelconque est proportionnelle à la somme des moments des forces extérieures*. Si donc μ représente un coefficient de proportionnalité (moment d'élasticité de flexion), on peut écrire :

$$\mu \frac{d\varphi}{ds} = X(b-y) - Y(a-x) + C \quad (2)$$

La théorie de la flexion donne la relation $\mu = EI_s$, (produit du module d'Young par le moment d'inertie principal de la section transversale de la lame). Dans le cas, ordinairement réalisé d'une lame à section rectangulaire, de largeur c et d'épaisseur e , on a :

$$\mu = \frac{1}{12} Ee^3c$$

Il s'agit d'intégrer l'équation (2). Nous pouvons d'abord la ramener à une forme plus simple en la dérivant par rapport à s :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -X \frac{dy}{ds} + Y \frac{dx}{ds}$$

et en remarquant que

$$dx = ds \sin \varphi; \quad dy = ds \cos \varphi$$

on a :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -X \cos \varphi + Y \sin \varphi \quad (3)$$

2. — *Première approximation. — Oscillation infiniment petite.* — Nous intégrerons l'équation (3) par des approximations successives de façon à arriver au degré d'exactitude réalisé dans les expériences.

Mais il est important d'étudier complètement la première approximation correspondant à des oscillations d'amplitude

infinitement petite pour mettre en lumière les caractères principaux du mouvement.

Posons donc $\sin \varphi = \varphi$ et $\cos \varphi = 1$ ce qui revient à négliger φ^2 devant l'unité.

L'équation à résoudre est :

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -X + Y\varphi \quad (4)$$

Posons $\omega^2 = \frac{Y}{\mu}$; l'intégration est immédiate et donne, P et Q étant deux constantes :

$$\varphi = \frac{X}{Y} + P \cosh \omega s + Q \sinh \omega s$$

Calculons maintenant x et y .

Nous avons $dx = \varphi ds$ et $dy = ds$.

D'autre part, pour $s=0$, $x=0$ et $y=0$, d'où :

$$\begin{cases} x = \frac{X}{Y}s + \frac{P}{\omega} \sinh \omega s + \frac{Q}{\omega} (\cosh \omega s - 1) \\ y = s \end{cases}$$

Il reste à déterminer les constantes P et Q en écrivant, d'une part, que pour $s=0$, $\varphi=0$; d'autre part que pour $s=l$, $\mu \frac{d\varphi}{ds} = C$, on obtient ainsi :

$$P = -\frac{X}{Y}$$

$$Q = \frac{C + \mu \omega \frac{X}{Y} \sinh \omega l}{\mu \omega \cosh \omega l}$$

Portons ces valeurs dans les expressions de φ , x et y , et faisons ensuite $s=l$, nous obtenons les valeurs de θ , a et b .

$$(5) \quad \begin{cases} \theta = \frac{X}{Y} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right) + \frac{C}{\mu \omega} \tanh \omega l \\ a = \frac{X}{Y} \left(1 - \frac{\tanh \omega l}{\omega} \right) + \frac{C}{\mu \omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega l} \right) \\ b = l \end{cases}$$

Posons pour simplifier : $A = 1 - \frac{1}{ch\omega l}$; $B = \frac{1}{\omega} th\omega l$, il vient :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = A \cdot \frac{X}{Y} + B \cdot \frac{C}{\mu} \\ a = (l - B) \frac{X}{Y} + A \cdot \frac{C}{\mu\omega^2} \\ b = l \end{array} \right.$$

D'autre part, l'approximation faite donne pour les équations du mouvement :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 a}{dt^2} + Mh \frac{d^2 \theta}{dt^2} - X = 0 \\ Y = Mg \\ I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + Mh \frac{d^2 a}{dt^2} + Mgh\theta + C = 0 \end{array} \right.$$

Il suffit maintenant d'éliminer X, Y et C entre les équations (6) et (7) pour obtenir l'équation donnant θ en fonction de t .

On est ainsi conduit à l'équation du 4^e ordre suivante :

$$\left(\frac{I - Mh^2}{g} \right) \left(l - B - \frac{A^2 \mu}{Bg} \right) \frac{d^4 \theta}{dt^4} + \left\{ I + \frac{\mu h}{Bg} \left[2A - A^2 + \frac{l - B}{h} \left(1 + \frac{MghB}{\mu} \right) \right] \right\} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(Mgh + \frac{\mu}{B} \right) \theta = 0$$

équation qu'on peut écrire plus simplement, en appelant ρ le rayon de gyration :

$$(8) \quad \frac{M\rho^2}{g} \left(l - \frac{2}{\omega} th. \frac{1}{2} \omega l \right) \frac{d^4 \theta}{dt^4} + \left[I + Mhl + \frac{\mu}{g} (\omega l coth. \omega l - 1) \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (Mgh + \mu \omega coth. \omega l) \theta = 0$$

Posons :

$$U = \frac{M\rho^2}{g} \left(l - \frac{2}{\omega} th. \frac{1}{2} \omega l \right)$$

$$V = I + Mhl + \frac{\mu}{g} (\omega l coth. \omega l - 1)$$

$$W = Mgh + \mu \omega coth. \omega l$$

l'équation devient :

$$U \frac{d^4 \theta}{dt^4} + V \frac{d^2 \theta}{dt^2} + W\theta = 0.$$

La discussion de cette équation montre que θ pourra toujours être considéré comme la somme de deux fonctions harmoniques :

$$\theta = E \cos (\alpha t - \delta) + F \cos (\beta t - \delta')$$

en posant :

$$\alpha = \frac{V - \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}$$

$$\beta = \frac{V + \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}$$

En imposant d'abord qu'à l'instant initial, le pendule et la lame partent sans vitesse, c'est-à-dire que, pour $t = 0$ $\frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{da}{dt} = 0$ (condition qui revient à écrire $\frac{d^3\theta}{dt^3} = 0$ comme on s'en assure facilement), il vient :

$$\delta = 0 \quad \text{et} \quad \delta' = 0$$

d'où :

$$\theta = E \cos \alpha t + F \cos \beta t.$$

En choisissant convenablement les conditions initiales, le mouvement peut se réduire à une fonction harmonique simple. Soient θ_0 et α_0 les valeurs initiales de θ et de α . On trouve que E et F sont déterminées par les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = E + F \\ \alpha_0 = \frac{1}{A\mu + MghB} \left\{ Bg(V-1) - A\mu h \right\} (E + F) - BgU(E\alpha^2 + F\beta^2) \end{array} \right\}$$

et pour que l'on ait un mouvement harmonique simple, il suffit que le rapport $\frac{\alpha_0}{\theta_0} = \lambda$ ait la valeur suivante :

$$(9) \quad \lambda = \frac{1}{A\mu + MghB} \left\{ Bg(V-1) - A\mu h - BgU\alpha^2 \right\}$$

Cette valeur λ est d'ailleurs aussi, la valeur constante du rapport $\frac{\alpha}{\theta}$, en sorte que tout se passe au point de vue géométrique, comme si le pendule oscillait effectivement autour

d'un point O' (centre de flexion) fixe et situé à la distance λ du point A .

Il semble que les conditions particulières qui viennent d'être déterminées, n'étant pas, en général, réalisées, le mouvement sera plus complexe. En réalité dans tous les cas pratiques, β est beaucoup plus grand que α : au début du mouvement il y aura superposition d'une oscillation principale d'amplitude θ_0 et de période $T = \frac{2\pi}{\alpha}$, et d'une vibration beaucoup plus rapide, en général, et de faible amplitude. Par suite des résistances au mouvement (résistance de l'air et surtout frottement intérieur du métal), cette vibration s'éteindra rapidement et le mouvement deviendra harmonique simple.

L'équation du mouvement étant alors :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha^2\theta.$$

on montre qu'il doit alors exister une relation de la forme $\alpha = \lambda\theta$ et cette condition conduit à l'équation suivante qui définit λ :

$$\lambda^2 M[A\mu + MghB] + \lambda M[IBg + p] + [Mhp - IA\mu] = 0$$

avec :

$$p = A^2 h \mu - (l - B)(\mu + MghB).$$

On reconnaît facilement que la plus petite racine de cette équation est précisément la valeur de λ définie par la formule (9).

Donc, quelles que soient les conditions initiales, le mouvement du pendule, légèrement troublé au début, deviendra rapidement un mouvement harmonique et tel que l'axe du pendule passera constamment par un point fixe (centre de flexion).

3. — *Quelques cas particuliers.* — a) Supposons ωl petit devant l'unité. Cela aura lieu s'il s'agit d'une lame très

courte, ou d'une lame très rigide, de grande épaisseur et d'un pendule relativement léger.

On obtient dans ce cas :

$$\alpha^2 = \frac{Mgh + \frac{\mu}{l}}{1 + Mhl}$$

formule qui montre que la lame agit surtout par le couple qu'elle exerce sur le pendule. Ce couple, $\frac{\mu\theta}{l}$ aurait pu s'obtenir directement en considérant que la lame étant de très faible longueur sa courbure est constante et par conséquent égale à $\frac{\theta}{l}$. Pratiquement, la longueur de la lame n'est jamais assez petite ni son épaisseur assez grande pour que la formule précédente soit applicable.

b) Considérons le cas, qui correspond d'ailleurs à une série de mes expériences, dans lequel une très longue lame ou un long fil supporte une masse pesante de petit volume. Le pendule peut alors approximativement être considéré comme un pendule simple, et on arrive à l'expression suivante :

$$\alpha^2 = \frac{g}{l - B}.$$

La longueur du pendule est diminuée, par l'effet de la courbure de la lame, de la quantité $B = \frac{1}{\omega} \text{th } \omega l$ ou plus simplement puisque la lame est très longue, $B = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu}{Mg}}$. Cette quantité est indépendante de la longueur du pendule, d'autant plus grande que le poids du pendule est petit et que la lame est plus rigide. Le couple qu'exerce la lame est nul.

Ce résultat est valable d'ailleurs, dans d'assez larges limites; il s'applique dès que la lame atteint quelques centimètres de longueur (ω étant de l'ordre de l'unité). En effet si on cherche l'expression de l'angle φ en fonction de s , on trouve :

$$\varphi = \theta(1 - e^{-\omega s})$$

et on voit qu'à partir d'une certaine distance de l'origine, la courbure ne varie plus beaucoup.

c) *Cas d'une lame ou d'un fil très flexible. Application au pendule de Borda.* — Il est intéressant de se proposer d'étudier le mouvement d'un pendule suspendu à un fil infiniment flexible à partir des équations précédentes. Il suffit d'y faire $\mu = 0$.

L'équation qui donne λ se simplifie beaucoup et si on suppose que le rayon de gyration est petit par rapport à la longueur du pendule, on obtient :

$$\lambda = l - \frac{Mp^2}{I + Mhl} \cdot l.$$

Quand une masse pesante est suspendue à l'extrémité d'un fil, l'oscillation se fait donc autour d'un point différent du point d'attache supérieur. Ces deux points ne coïncident que quand le pendule peut être considéré comme un pendule simple.

L'expression de α^2 est ici :

$$\alpha^2 = \frac{Mgh}{I + Mhl} + \frac{M^2gh^2p^2l}{(I + Mhl)^3}.$$

Dans le cas où il s'agit d'une boule de rayon r suspendue à un fil de longueur l on obtient :

$$\alpha^2 = \frac{g}{l + \frac{7}{5}r} + \frac{2}{5} \cdot \frac{rlg}{\left(l + \frac{7}{5}r\right)^3}$$

expression qui diffère de celle qui est donnée dans les traités classiques :

$$\alpha_1^2 = \frac{g}{(l + r) \left[1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{(l + r)^2} \right]}$$

de la quantité :

$$\alpha_1^2 - \alpha^2 = \frac{8}{25} \frac{r^2}{l^3} g.$$

Les deux expressions de α^2 diffèrent, car la deuxième est obtenue en considérant le système comme rigide et oscillant seulement autour d'un point, alors qu'il s'agit d'un système à deux libertés, l'une au point de suspension et l'autre au point d'attache du fil à la boule (Le calcul direct de l'influence de cette dernière rotation conduit au même résultat).

Dans le cas du pendule de Borda, $l = 400$ cm., $r = 2$ cm., on trouve :

$$\alpha_1^2 - \alpha^2 = 2.10^{-5}.$$

Donc la durée d'oscillation du pendule de Borda est en réalité un peu plus grande que celle qui est obtenue par la formule ordinaire, la variation relative étant :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \alpha^2}{\alpha^2} = 4.10^{-6}.$$

C'est là une erreur très légère qui ne modifie pas sensiblement les résultats de l'illustre physicien. Mais cela tient à ce que le pendule de Borda avait 4 m. de longueur. Pour un pendule à seconde la correction est de l'ordre de 6.10^{-5} , c'est-à-dire qu'elle devient importante et qu'il est indispensable d'en tenir compte.

J'ai pensé qu'il était intéressant de déduire des formules générales, une correction importante dont on ne parle généralement pas. Cependant, Laplace avait signalé la nécessité d'une telle correction en étudiant le pendule de Borda et elle a été calculée directement par Bessel⁽¹⁾ qui l'a fait subir à ses déterminations.

D'ailleurs, le calcul exact de la correction devrait tenir compte du fait que μ n'est jamais nul, et que le fil oppose une certaine résistance au mouvement.

4. *Calcul du couple C et de la force horizontale X exercés sur la lame.* — En considérant l'équation du mouvement sous la forme :

(1) BESSEL. Recherches sur la longueur du pendule simple qui bat la seconde, *Mém. Académie de Berlin*, 1826. Appendice VII.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha^2\theta$$

et en faisant $\alpha = \lambda\theta$, on tire des formules (7) :

$$G = \left[\frac{\mu}{B} - \frac{A\mu}{Bg} (h + \lambda) \right] \theta$$

et :

$$X = \frac{h + \lambda}{g} \alpha^2 \theta.$$

En remplaçant λ par l'expression (9), il vient :

$$(10) \quad G = \frac{\mu\theta}{A\mu + MghB} \left(\frac{Mgh}{ch\omega l} + A\alpha^2 M\rho^2 \right)$$

et :

$$(11) \quad X = \frac{Mg\theta}{A\mu + MghB} (\mu + MghB - B\alpha^2 M\rho^2)$$

Ces formules seront utilisées dans la suite.

5. *Expressions simplifiées.* — On peut le plus souvent admettre que l'influence de la lame est faible par rapport à l'action motrice de la pesanteur (cela revient à considérer $\frac{\mu}{g}$ comme petit par rapport à Mgh) et d'autre part, que le rayon de giration ρ est petit par rapport à h . Les formules précédentes peuvent alors se simplifier ; elles donnent :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \frac{\mu\theta\omega}{sh\omega l} = \frac{Mg\theta}{\omega sh\omega l} \\ X = Mg\theta. \end{array} \right.$$

Avec ces nouvelles valeurs, on tire des formules (6) et (7) les expressions simples de λ et de T , suivantes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = l - \frac{1}{\omega} l h \frac{1}{2} \omega l \\ T = 2\pi \sqrt{\frac{I + Mh\lambda}{Mgh + \frac{Mg}{\omega sh\omega l}}} \end{array} \right.$$

Ces formules mettent nettement en évidence les deux effets de la lame, l'un dû à sa forme, l'autre à sa réaction élastique. Elles peuvent suffire, dans les cas réalisés en pratique, pour le calcul approché du centre de flexion et de la durée d'oscillation du pendule.

Si on emploie, comme nous le préconisons, une lame relativement longue (au moins de 1 centimètre de longueur), on peut, en remarquant que ωl est grand, prendre, pour calculer λ , la formule :

$$(14) \quad \lambda = l - \frac{1}{\omega}$$

Mais ce n'est là qu'une formule approchée. Si on veut calculer avec précision la position du centre de flexion (pour déterminer par exemple celle de l'axe de l'échappement), il sera nécessaire de tenir compte du rayon de gyration. La formule à appliquer, que l'on trouve très simplement, est alors :

$$(15) \quad \lambda = l - \frac{1}{\omega} - \frac{\rho^2}{h^2} \left(l - \frac{2}{\omega} \right)$$

Avec une lame de 1 cm. de longueur, 1 cm. de largeur, 0 mm 1 d'épaisseur et un pendule à seconde de 5 k. pour lequel $\frac{\rho}{h} = \frac{1}{5}$, on trouve : $\lambda = 0$ cm. 693.

En appliquant la formule (14) nous aurions fait l'erreur importante de 1 mm. 2.

6. *Lancement du pendule, sans perturbation, à l'aide d'une force horizontale.* — Soit une force horizontale F , agissant à la distance z au-dessous du centre de gravité du pendule. A l'aide de cette force, nous écartons le pendule de sa position d'équilibre, puis nous l'abandonnons à lui-même en supprimant la force. Cherchons à déterminer z de façon que le pendule soit lancé sans perturbation, c'est-à-dire que la vibration dont nous avons reconnu la possibilité ne se produise pas.

Le problème de l'équilibre entre le poids du pendule, la force F et les réactions élastiques du ressort se traite par des calculs identiques à ceux qui nous ont conduit aux formules (6) de cette note. Avec les mêmes notations, on obtient :

$$\begin{cases} \theta = A \frac{F}{Mg} + B \frac{C}{\mu} \\ \alpha = (l - B) \frac{F}{Mg} + A \frac{C}{\mu \omega^2} \end{cases}$$

en posant ici $C = F(h + \varepsilon) - Mgh\theta$.

Pour que le mouvement se réduise à une oscillation harmonique simple, sans vibration, on doit avoir la relation :

$$\frac{\alpha}{\theta} = \lambda$$

où λ a la valeur (14) donnée précédemment :

De ces équations, on déduit facilement :

$$z = \frac{\rho^2}{h} \left(1 + \frac{1}{\omega h} \right).$$

La force doit s'exercer un peu au-dessous du centre de percussion du pendule (qui correspond au point d'encastrement inférieur). Le cas d'un choc s'exerçant sur le pendule se traiterait de la même façon et donnerait le même résultat.

Pratiquement, étant donnés la petitesse de l'impulsion qui entretient le régulateur d'une horloge, et l'inconvénient qu'il y aurait à prendre une fourchette trop longue, il n'est pas indispensable de réaliser la condition précédente.

On pourrait le faire dans le cas de l'entretien électrique. Mais le problème actuel a surtout comme intérêt de déterminer la façon de *lancer un pendule libre à lame sans perturbation* (Voir les projets d'un pendule étalon de temps, et garde-temps).

7. *Travail de déformation de la lame et décroissance des oscillations, due au frottement intérieur.*

1° Soit une fibre de la lame, de section dS , à la distance h de la fibre neutre. Au point où la courbure a la valeur $\frac{d\varphi}{ds}$, la déformation relative est $h \frac{d\varphi}{ds}$ et la force élastique éveillée par cette déformation est :

$$Eh \frac{d\varphi}{ds} dS.$$

La force élastique étant proportionnelle à la déformation, qui croît de 0 à $h \frac{d\varphi}{ds} ds$, le travail élémentaire correspondant est :

$$\frac{1}{2} E h^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 dS \cdot ds.$$

Pour toute la section transversale de la lame, la courbure $\frac{d\varphi}{ds}$ a une valeur constante ; donc, en introduisant $\mu = EI_s$, on a pour le travail total de déformation de la lame :

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \cdot ds.$$

Bornons-nous au cas où le rayon de giration ρ est petit devant h ; les formules (12) sont applicables, la courbure a comme valeur :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \theta_0 \omega \left(\frac{ch\omega s}{th\omega l} - sh\omega s \right).$$

On trouve alors :

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4} \mu \omega \theta_0^2 \left(\frac{1}{th\omega l} + \frac{\omega l}{sh^2\omega l} \right).$$

2° La quantité d'énergie que nous venons de calculer, absorbée par la lame lorsque le pendule va de sa position d'équilibre à son élongation extrême θ_0 , n'est pas intégralement restituée pendant le retour vers la position d'équilibre, par suite du frottement intérieur du métal.

Faisons l'hypothèse légitime, que l'énergie dissipée est proportionnelle au travail de déformation.

Soit $\Delta\theta_0$ la variation d'amplitude par période, due *uniquement* au frottement intérieur, la variation correspondante de l'énergie du pendule est sensiblement $Mgh\theta_0\Delta\theta_0$ (si la lame n'est pas trop rigide), de sorte que si k est une constante qui ne dépend que de la nature du métal, on a :

$$\Delta\theta_0 = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega h} \left(\frac{1}{th\omega l} + \frac{\omega l}{sh^2\omega l} \right) \theta_0.$$

Par le seul fait du frottement intérieur, l'amplitude décroît en progression géométrique. Le décrément est d'autant plus grand, que la lame est plus courte et plus rigide.

NOTE IV

Mouvement du pendule élastique, dans le cas d'amplitudes quelconques. Détermination de la correction de réduction à l'amplitude infiniment petite.

1. — Dans la note III nous venons de montrer que si on se borne à considérer les oscillations d'amplitude très petite, elles sont isochrones. Nous nous proposons maintenant de chercher l'influence de l'amplitude sur la durée de l'oscillation pour voir si elle suffit à expliquer les écarts à la loi d'isochronisme constatés expérimentalement.

Reprenons l'équation générale qui sert à déterminer l'action du ressort :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -X \cos \varphi + Y \sin \varphi.$$

Nous y ferons maintenant $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ et $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$ ce qui revient à ne négliger que les termes en φ^4 devant l'unité.

Dans les termes de l'ordre de φ^3 qui sont très petits, nous prendrons pour φ la valeur obtenue en première approximation :

$$(1) \quad \varphi = \frac{X}{Y} (1 - ch\omega s) + \frac{C + \mu\omega \frac{X}{Y} sh\omega l}{\mu\omega ch\omega l} \cdot sh\omega s.$$

Calcul de θ . — Nous devons intégrer l'équation suivante :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -X + Y\varphi + f$$

en posant $f = \frac{X}{2} \varphi^2 - \frac{Y}{6} \varphi^3$ où φ a la valeur (1).

Nous ramènerons cette intégration à la recherche d'intégrales définies par la méthode de la variation des constantes. Posons :

$$\omega' = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$$

nous pouvons écrire :

$$\varphi = \frac{X}{Y} + P'ch\omega's + Q'sh\omega's \\ + \frac{1}{\mu\omega} \left[sh\omega s \int_0^s f.ch\omega s ds - ch\omega s \int_0^s f.sh\omega s ds \right]$$

f étant connue en fonction de s il n'y a aucune difficulté à calculer les intégrales définies qui entrent dans l'expression de φ . D'autre part, pour $s=0$, $\varphi=0$, d'où $P' = -\frac{X}{Y}$. On

$$\text{obtient finalement, en posant } Q = \frac{C + \mu\omega \frac{X}{Y} sh\omega l}{\mu\omega ch\omega l} :$$

$$(2) \varphi = \frac{X}{Y} (1 - ch\omega's) + Q'sh\omega's \\ + \frac{1}{\mu\omega^2} \left\{ \frac{X^3}{2Y^2} \left(\frac{1}{24} sh^2\omega s.ch\omega s + \frac{2}{3} ch\omega s - \frac{3}{8} \omega s.sh\omega s - \frac{2}{3} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{16} Q^2 X (sh^2\omega s.ch\omega s - \omega s.sh\omega s) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{8} Q \frac{X^2}{Y} + \frac{1}{24} Q^3 Y \right) \left(\frac{1}{2} sh\omega s.ch^2\omega s + sh\omega s - \frac{3}{2} \omega s.ch\omega s \right) \right\}$$

Pour calculer la constante Q' on écrit que pour $s=l$ le couple agissant sur la lame se réduit à C . Pour cela on calcule $\frac{d\varphi}{ds}$, on y fait $s=l$ et on écrit :

$$\mu \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l = C.$$

Si ensuite, on remplace la constante Q par sa valeur et si

on fait $s = l$ dans l'expression de φ , on arrive à l'expression de θ :

$$(3) \quad \theta = \frac{X}{Y} \left(1 - \frac{1}{ch\omega l} \right) + \frac{C}{\mu\omega} th\omega l + \\ + \alpha_1 \frac{X^3}{Y^3} + \alpha_2 \frac{X^2}{Y^2} \frac{C}{\mu\omega} + \alpha_3 \frac{X}{Y} \frac{C^2}{\mu^2\omega^2} + \alpha_4 \frac{C^3}{\mu^3\omega^3}$$

avec les valeurs suivantes pour les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{15}{48} \frac{1}{ch\omega l} + \frac{1}{48} \frac{1}{ch^3\omega l} + \frac{1}{4} \omega l \frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{1}{16} \omega l \frac{sh\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} + \frac{1}{16} \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} + \frac{3}{8} \frac{\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{3}{16} \frac{\omega l}{ch^4\omega l} \\ \alpha_3 = -\frac{3}{16} \frac{sh^2\omega l}{ch^3\omega l} + \frac{3}{16} \omega l \frac{sh\omega l}{ch^4\omega l} \\ \alpha_4 = \frac{1}{24} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} + \frac{1}{16} \frac{\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{5}{48} \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} \end{array} \right.$$

Calcul de a . — Nous calculerons a en partant de la relation :

$$dx = ds \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)$$

en remplaçant φ dans le premier terme de la parenthèse par la valeur (2) que nous avons obtenue, et dans le deuxième terme par la valeur de première approximation (1).

En intégrant dans ces conditions, on obtient :

$$(4) \quad x = \frac{X}{Y} \left(s - \frac{sh\omega's}{\omega'} \right) + Q' \frac{(ch\omega's - 1)}{\omega'} \\ + \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{1}{4} \frac{X^3}{Y^3} \left(\frac{9}{2} sh\omega s - \frac{3}{4} \omega s \cdot ch\omega s - 3\omega s + \frac{1}{4} sh\omega s \cdot ch^2\omega s - sh\omega s \cdot ch\omega s \right) \right. \\ + \frac{1}{4} Q^2 \frac{X}{Y} \left(\frac{3}{4} sh\omega s \cdot ch^2\omega s - \frac{1}{2} sh\omega s - \frac{1}{4} \omega s \cdot ch\omega s - ch\omega s \cdot sh\omega s + \omega s \right) \\ + \frac{QX^2}{Y^2} \left(\frac{1}{2} ch^2\omega s - ch\omega s - \frac{3}{16} sh^2\omega s \cdot ch\omega s + \frac{3}{16} \omega s \cdot sh\omega s + \frac{1}{2} \right) \\ \left. + Q^3 \left(\frac{1}{16} \omega s \cdot sh\omega s - \frac{1}{16} sh^2\omega s \cdot ch\omega s \right) \right\}.$$

Comme plus haut, nous avons à remplacer les constantes Q et Q' par leur valeur et à faire $s = l$ dans l'expression de x . D'où la valeur de a :

$$(5) \quad a = \frac{X}{Y} \left(l - \frac{th\omega' l}{\omega'} \right) + \frac{C}{\mu\omega'^2} \left(1 - \frac{1}{ch\omega' l} \right) + \\ + \frac{1}{\omega} \left(\alpha_3 \frac{X^3}{Y^3} + 3\alpha_1 \frac{C}{\mu\omega} \frac{X^2}{Y^2} + \alpha_2 \frac{C^2}{\mu^2\omega^2} \frac{X}{Y} + \frac{\alpha_3}{3} \frac{C^3}{\mu^3\omega^3} \right)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les constantes qui interviennent dans l'expression de θ .

On a de plus :

$$\alpha_3 = \frac{7}{8} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} - \frac{1}{16} \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} - \frac{1}{2} \omega l - \frac{1}{2} \omega l \frac{1}{ch^2\omega l} + \frac{1}{16} \omega l \frac{1}{ch^4\omega l}.$$

Calcul de b. — On calcule b d'une façon analogue, à partir de l'équation

$$dy = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) ds$$

où φ est remplacé par sa valeur (1) de première approximation. L'intégration donne :

$$y = s - \frac{1}{2\omega} \left\{ \frac{X^2}{Y^2} \left(\frac{3}{2} \omega s + \frac{sh\omega s \cdot ch\omega s}{2} - 2sh\omega s \right) + \right. \\ \left. + \frac{Q^2}{2} (sh\omega s \cdot ch\omega s - \omega s) + 2 \frac{X}{Y} Q (ch\omega s - sh^2\omega s - \omega^2 s) \right\}$$

En remplaçant Q par sa valeur et faisant $s = l$, il vient

$$b = l - \frac{1}{2\omega} \left(\beta_1 \frac{X^2}{Y^2} + \beta_2 \frac{C}{\mu\omega} \frac{X}{Y} + \beta_3 \frac{C^2}{\mu^2\omega^2} \right)$$

en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \omega l + \frac{1}{2} \frac{\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{3}{2} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} \\ \beta_2 = 2 - \frac{2}{ch\omega l} - \frac{\omega l sh\omega l}{ch^2\omega l} \\ \beta_3 = \frac{1}{2} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} - \frac{1}{2} \frac{\omega l}{ch^2\omega l} \end{array} \right.$$

Dans les termes correctifs de θ, a, b qui sont de l'ordre de φ^3 c'est-à-dire très petits, nous pouvons remplacer $\frac{X}{Y}$ et $\frac{C}{\mu\omega}$

par leurs valeurs de première approximation (Formules 10 et 11 de la note IV) $\frac{X}{Y}$ et $\frac{C}{\mu\omega}$ (proportionnels à θ) sont immédiatement calculables numériquement; il en est de même des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. On peut donc mettre θ, a, b , sous la forme :

$$(6) \quad \begin{cases} \theta = \frac{X}{Y} \left(1 - \frac{1}{ch\omega'l} \right) + \frac{C}{\mu\omega'} th\omega'l + K\theta^3 \\ a = \frac{X}{Y} \left(l - \frac{th\omega'l}{\omega'} \right) + \frac{C}{\mu\omega'^2} \left(1 - \frac{1}{ch\omega'l} \right) + H\theta^3 \\ b = l + J\theta^2 \end{cases}$$

Mais ce n'est pas tout, car Y n'est pas une constante comme dans la première approximation, et de même ω' . D'autre part X et C renferment des termes du premier ordre en φ et des termes du troisième ordre qu'il est nécessaire de séparer.

La deuxième des équations (1) de la note III donne :

$$Y = Mg - M \frac{d^2b}{dt^2} + Mh \left[\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

ou :

$$Y = Mg + \varepsilon$$

en posant

$$\varepsilon = Mh(\theta\theta'' + \theta'^2) - M \frac{d^2b}{dt^2} \quad \left(\theta' = \frac{d\theta}{dt}; \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)$$

On en déduit, ε étant petit :

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Mg} - \frac{\varepsilon}{M^2g^2}.$$

D'autre part, en posant toujours : $\omega = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$, on obtient :

$$\omega' = \omega + \frac{1}{2} \frac{\omega}{Mg} \cdot \varepsilon$$

d'où :

$$\begin{aligned} th\omega'l &= th\omega l + \frac{1}{2} \frac{\omega l}{Mg} \frac{\varepsilon}{ch^2\omega l} \\ \frac{1}{ch\omega'l} &= \frac{1}{ch\omega l} - \frac{1}{2} \frac{\omega l}{Mg} \frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Si on tire X et C des équations (1) de la note III en tenant compte de l'approximation actuelle et en appelant X_0 et C_0 leur partie principale, du premier ordre en φ , à savoir :

$$X_0 = -M \frac{d^2 a}{dt^2} - Mh\theta''$$

$$C_0 = -I\theta'' - Mh \frac{d^2 a}{dt^2} - Mgh\theta,$$

il vient :

$$X = X_0 + Mh \left(\frac{1}{2} \theta^2 \theta'' + \theta \theta'^2 \right)$$

$$C = C_0 + Mh \left(\frac{1}{2} \theta^2 \frac{d^2 a}{dt^2} + \theta \frac{d^2 b}{dt^2} + g \frac{\theta^3}{6} \right).$$

Cette dernière expression peut d'ailleurs, en tenant compte des valeurs de a et b , s'écrire :

$$C = C_0 + Mh \left[\left(\frac{\lambda}{2} + 2J \right) \theta^2 \theta'' + 2J \theta \theta'^2 + \frac{g\theta^3}{6} \right].$$

Dans les équations (6) remplaçons maintenant X , Y , C , $\frac{1}{ch\omega'l}$, $th\omega'l$ et ω' par les valeurs que nous venons de trouver, nous obtenons θ et a sous la forme d'une partie principale de l'ordre de φ identique à celle obtenue en première approximation et d'une partie corrective en φ^3 .

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \frac{AX_0}{Mg} + \frac{BC_0}{\mu} + \left(m + \frac{MhB\lambda}{2\mu} \right) \theta^2 \theta'' + \\ &\quad + \left(m + \frac{Ah}{2g} \right) \theta \theta'^2 + \left(K + \frac{MghB}{6\mu} \right) \theta^3 \\ a &= \frac{X_0(l-B)}{Mg} + \frac{AC_0}{Mg} + \left(n + \frac{Ah\lambda}{2g} \right) \theta^2 \theta'' + \\ &\quad + \left(n + \frac{h(l-B)}{2g} \right) \theta \theta'^2 + \left(H + \frac{Ah}{6} \right) \theta^3 \end{aligned} \right.$$

avec:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= (h-2J) \left\{ \left(\frac{1}{2} \omega l \frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} - A \right) \frac{X_0}{Mg^2\theta} + \right. \\ &\quad \left. + [l-B-lth^2\omega l] \frac{C_0}{2\mu g\theta} \right\} + 2J \frac{MhB}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{Ah}{g} \\ n &= (h-2J) \left\{ \left(\frac{1}{2} \omega l \frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} - A \right) \frac{C_0}{Mg^2\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{3}{2} (l-B) - \frac{1}{2} lth^2\omega l \right] \frac{X_0}{Mg^2\theta} \right\} + 2J \frac{Ah}{g} + \frac{1}{2} \frac{h}{g} (l-B) \end{aligned} \right.$$

Comme en première approximation, on a posé ici :

$$A = 1 - \frac{1}{c h \omega l}$$

$$B = \frac{1}{\omega} t h \omega l$$

Dans les termes correctifs, on peut admettre les relations :

$$\theta \theta'^2 = \alpha^2 \theta \theta^2 - \alpha^2 \theta^3$$

$$\theta^2 \theta'' = -\alpha^2 \theta^3$$

qui supposent que le mouvement est encore harmonique, de période $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Appelons $\mathfrak{N}$ la correction de θ et $\mathfrak{T}$ celle de a . Chacune de ces corrections se compose d'un terme en $\theta \theta_0^2$ et d'un terme en θ^3 .

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{N} &= p \theta \theta_0^2 + q \theta^3 \\ \mathfrak{T} &= r \theta \theta_0^2 + s \theta^3 \end{aligned} \right\}$$

avec :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \left(m + \frac{1}{2} \frac{\Lambda h}{g} \right) \alpha^2 \\ q &= \frac{M g h B}{6 \mu} + K - \alpha^2 \left(2m + \frac{1}{2} \frac{\Lambda h}{g} + \frac{1}{2} \frac{M h B \lambda}{\mu} \right) \\ r &= \left(n + \frac{1}{2} \frac{h(l-B)}{g} \right) \alpha^2 \\ s &= \frac{\Lambda h}{6} + H - \alpha^2 \left(2n + \frac{1}{2} \frac{h(l-B)}{g} + \frac{1}{2} \frac{\Lambda h \lambda}{g} \right). \end{aligned} \right.$$

Si nous remplaçons X_0 et C_0 , parties principales de X et Y par leurs valeurs tirées de l'équation du mouvement, il vient :

$$\begin{aligned} \theta &= - \left(\frac{\Lambda}{g} + \frac{M h B}{\mu} \right) \frac{d^2 a}{dt^2} - \left(\frac{\Lambda h}{g} + \frac{B I}{\mu} \right) \theta'' - \frac{M g h B}{\mu} \theta + \mathfrak{N} \\ a &= - \left(\frac{l-B}{g} + \frac{\Lambda h}{g} \right) \frac{d^2 a}{dt^2} - \left[\frac{h(l-B)}{g} + \frac{\Lambda I}{M g} \right] \theta'' - \Lambda h \theta + \mathfrak{T}. \end{aligned}$$

Éliminons a , comme dans les calculs de première approximation, nous obtenons finalement l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_0^2}{g} \left(l - \frac{2}{\omega} l h \frac{1}{2} \omega l \right) \frac{d^4 \theta}{dt^4} + \\
 (11) \quad & + \left[1 + M h l + \frac{\mu}{g} \left(\frac{l}{B} - 1 \right) \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(M g h + \frac{\mu}{B} \right) \theta \\
 & - \frac{\mu}{B} \mathfrak{N} - (l - B + A h) \frac{\mu}{B g} \frac{d^2 \mathfrak{N}}{dt^2} + \frac{A \mu + M g h B}{B g} \frac{d^2 \mathfrak{K}}{dt^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation du mouvement rappelle celle que nous avons obtenue dans l'étude de la première approximation, mais le deuxième membre au lieu d'être nul, a ici une valeur très petite de l'ordre de θ_0^3 . Appelons P ce deuxième membre.

On peut calculer $\mathfrak{N}$, $\frac{d^2 \mathfrak{N}}{dt^2}$, $\frac{d^2 \mathfrak{K}}{dt^2}$ par les formules (9) et (10) et mettre P sous la forme :

$$P = P_1 \cdot \theta \theta_0^2 + P_2 \theta^3.$$

Il suffit pour cela de poser :

$$(12) \quad \begin{cases} P_1 = \frac{\mu}{B} p + (6q - p)(l - B + A h) \frac{\mu}{B g} \alpha^2 - (6s - r) A \mu + M g h B \frac{\alpha^2}{B g} \\ P_2 = \frac{\mu}{B} q - 9q(l - B + A h) \frac{\mu}{B g} \alpha^2 + 9s(A \mu + M q h B) \frac{\alpha^2}{B g}. \end{cases}$$

2. *Variation de la durée d'oscillation.* — L'équation du mouvement se présente sous la forme :

$$U \frac{d^4 \theta}{dt^4} + V \frac{d^2 \theta}{dt^2} + W \theta = P.$$

La méthode de la variation des constantes, appliquée à cette équation permet de trouver son intégrale sous une forme particulièrement commode pour le calcul de la variation de la durée d'oscillation produite par P. En appliquant cette méthode, on trouve aisément :

$$\begin{aligned}
 \theta = & E_1 \cos(\alpha t - \delta_1) + E_2 \cos(\beta t - \delta_2) \\
 + & \frac{1}{U(\alpha^2 - \beta^2)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(\sin \alpha t \int_0^t P \cos \alpha t \, dt - \cos \alpha t \int_0^t P \sin \alpha t \, dt \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\beta} \left(\sin \beta t \int_0^t P \cos \beta t \, dt - \cos \beta t \int_0^t P \sin \beta t \, dt \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Le mouvement se compose de deux oscillations harmoniques, légèrement troublées, l'une de période $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'autre de période $\frac{2\pi}{\beta}$, α et β étant les valeurs trouvées en première approximation. De la même façon que lorsqu'il n'y avait pas de perturbation, on peut déterminer les conditions initiales telles que la première subsiste seule ; d'ailleurs la seconde s'évanouit toujours très rapidement par suite des frottements, et il reste :

$$(13) \quad \theta = \theta_0 \cos \alpha t$$

$$+ \frac{1}{U\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \left[\sin \alpha t \int_0^t P \cos \alpha t dt - \cos \alpha t \int_0^t P \sin \alpha t dt \right].$$

On rentre ainsi dans la forme générale du mouvement harmonique perturbé et les résultats d'une note précédente s'appliquent immédiatement.

La variation de durée d'oscillation produite par la perturbation P a pour valeur :

$$\Delta T = \frac{1}{U\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)\theta_0} \int_0^T P \cos \alpha t dt.$$

Dans cette expression remplaçons P par :

$$P_1 \theta_0^3 \cos \alpha t + P_2 \theta_0^3 \cos^3 \alpha t$$

il vient :

$$\Delta T = \frac{T \cdot \theta_0^2}{U\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)} \left[\frac{1}{2} P_1 + \frac{3}{8} P_2 \right].$$

Remplaçons P_1 et P_2 par leurs expressions (12), nous obtenons finalement :

$$(14) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\theta_0^2}{U\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)} \left\{ \frac{\mu}{B} \left[1 - \frac{\alpha^2}{g} (l - B + Ah) \right] \left(\frac{1}{2} p + \frac{3}{8} q \right) + \frac{A\mu + Mgh^2}{Bg} \left(\frac{1}{2} r + \frac{3}{8} s \right) \right\}$$

Telle est l'expression générale de la variation relative de période correspondant à l'amplitude θ_0 , c'est-à-dire la formule permettant la réduction à l'amplitude infiniment petite de la durée d'oscillation d'un pendule à suspension élasti-

que. Proposons-nous de chercher l'ordre de grandeur de cette correction, en nous plaçant seulement dans quelques cas particuliers où les formules se simplifient beaucoup.

3. — *Cas d'une suspension ordinaire.* — Habituellement, la longueur de la suspension est petite vis-à-vis de la longueur du pendule. Dans ce cas, une discussion facile de l'importance des différents facteurs, montre que les termes correctifs de a et θ , en θ_0^2 ont une influence négligeable et qu'il reste seulement les termes en θ^3 sous la forme simple suivante :

$$q = \frac{MghB}{6\mu}$$

$$s = \frac{Ah}{6}$$

On obtient alors :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{16} \frac{1}{Mgh} \left[Mgh - Mh\alpha^2(l-B) + \frac{A^2h\mu}{Bg} \alpha^2 \right] \theta_0^2$$

expression qui s'écrit plus simplement :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{16} \theta_0^2 - \frac{1}{16} \frac{\theta_0^2}{h} \left(l - \frac{2}{\omega} th \frac{1}{2} \omega l \right)$$

ou encore, en introduisant λ par la formule (13) de la note III :

$$(15) \quad \frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \frac{2\lambda - l}{h} \right) \theta_0^2$$

Il résulte de cette formule que *la correction d'amplitude ne différera pas sensiblement de l'effet ordinaire des grands arcs d'oscillation* (ou erreur circulaire) : $\frac{1}{16} \theta_0^2$.

Dans le cas de l'exemple considéré dans le texte (page 111). On trouve que le terme supplémentaire est de l'ordre de

$$\frac{1}{2000} \theta_0^2$$

c'est-à-dire qu'on pourra le négliger, sans erreur sensible, dans les influences qui peuvent produire les écarts à l'isochronisme.

4. *Lame très courte.* — Dans le cas d'une lame extrêmement courte, on a $\lambda = \frac{l}{2}$ et la correction d'amplitude se réduit

$$\text{à : } \frac{1}{16} \theta_0^2.$$

Elle a la même valeur que dans le cas d'un pendule à couteau.

On pouvait le voir directement, car l'équation du mouvement se réduit alors à :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgh \sin \theta + \frac{\mu\theta}{l} = 0$$

et l'écart à l'isochronisme n'est dû qu'au terme $-Mgh \frac{\theta^3}{6}$, provenant du développement de $\sin \theta$, comme dans le pendule ordinaire.

5. — *Cas de très longues lames.* — Si h est petit par rapport à l , ce qui est le cas dans une série de mes expériences, la formule (15) n'est plus applicable.

A l'aide des formules générales dans lesquelles on fait $sh\omega l$ et $ch\omega l$ infinis, on obtient la correction suivante :

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{16} \frac{l^2}{(l-B)^2} - \frac{15}{64} \frac{B}{(l-B)} \right) \theta_0^2$$

qu'on peut encore écrire, B étant petit devant l :

$$(16) \quad \left(\frac{1}{16} - \frac{7}{64} \frac{1}{\omega l} \right) \theta_0^2$$

Il s'agit, encore ici, d'une correction qui ne diffère pas sensiblement de l'erreur circulaire.

Comme vérification des calculs généraux, les formules (15) et (16) ont été également obtenues directement.

En définitive, quelle que soit la longueur de la lame nous trouvons, en partant de la théorie élémentaire de la flexion plane et en appliquant les principes de la mécanique, *que la lame ne doit pas modifier sensiblement la loi suivant laquelle la durée d'oscillation dépend de l'amplitude.*

Remarque. — Dans les calculs de cette note comme dans ceux de la précédente, j'ai négligé la masse de la lame devant celle du pendule. Si nous avions en vue la détermination

absolue, précise, de la durée d'oscillation, cette approximation ne serait pas légitime, mais on peut montrer aisément que la masse de la lame n'intervient que pour modifier un peu la durée d'oscillation ; elle n'a aucune influence sur les écarts à la loi d'isochronisme du pendule.

NOTE V

Mouvement du pendule à ressort, dans l'hypothèse où la force élastique en un point, n'est plus exactement proportionnelle à la courbure de la lame.

1. — Pour des valeurs θ et a des paramètres définissant le mouvement, la lame ne présente pas la même forme et ne produit pas les mêmes réactions que dans le cas (noté IV) où elle était supposée suivre la loi de proportionnalité entre la force et la déformation. Pour déterminer cette forme et ces réactions, nous écrirons que le moment des forces extérieures en un point m de la lame n'est plus proportionnel à la courbure $\frac{d\varphi}{ds}$ de la lame en ce point, mais à une expression de la forme :

$$\frac{d\varphi}{ds} + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 + K'' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^4 + \dots$$

Cela résulte des considérations exposées dans le texte (page 138).

Nous avons donc :

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{ds} + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \dots = \frac{1}{\mu} [X(b-y) - Y(a-x)]$$

(μ a la même signification que dans les précédents calculs).

Comme dans la note III, nous dérivons cette expression par rapport à s , et nous remplaçons $\frac{dx}{ds}$ par $\sin \varphi$ et $\frac{dy}{ds}$ par $\cos \varphi$, pour obtenir :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{1}{\mu} (-X \cos \varphi + Y \sin \varphi) - K \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - K' \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 - \dots$$

Au degré d'approximation correspondant aux calculs de la note IV, nous avons, en posant toujours $\omega' = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \omega'^2 \left(\varphi - \frac{X}{Y} \right) + \omega'^2 \left(\frac{X}{Y} \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{6} \right) - K \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - K' \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 - \dots$$

Le deuxième terme du deuxième membre correspond à l'influence des grandes valeurs de l'amplitude et son effet a été calculé dans la Note IV. Les autres termes, en K, K'... ajoutent simplement leur effet à celui-là puisqu'il s'agit de termes petits; il n'y aura pas d'influence des termes perturbateurs les uns sur les autres au degré d'approximation (de l'ordre de φ^3) considéré.

Nous aurons donc seulement à ajouter à l'expression de φ déterminée dans la note IV (formule (2)) l'intégrale particulière suivante correspondant à l'influence des termes en K, K'...

$$\frac{1}{\omega} \left[sh\omega s \int_0^s F ch\omega s ds - ch\omega s \int_0^s F sh\omega s ds \right]$$

avec

$$F = -K \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - K' \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 + \dots$$

expression dans laquelle (F n'étant qu'une correction), nous pourrions faire

$$\omega = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{X}{Y} \omega sh\omega s + Q \omega ch\omega s$$

On trouve que les quantités à ajouter au deuxième membre de la formule (2) note IV, donnant φ , ont pour expression :

$$\begin{aligned} (2) \quad & -\frac{2}{3} K \omega \left[\left(\frac{X^2}{Y^2} + Q^2 \right) (sh\omega s \cdot ch\omega s - sh\omega s) + \frac{X}{Y} Q (1 - 2ch^2\omega s + ch\omega s) \right] \\ & + \frac{3}{8} K' \omega^2 \left[\frac{X^3}{Y^3} (sh^2\omega s \cdot ch\omega s - \omega s \cdot sh\omega s) - Q^3 (ch^2\omega s \cdot sh\omega s - 2sh\omega s + \omega s \cdot ch\omega s) \right] \\ & + \frac{X_0^2}{Y_0^2} Q \left[(2sh\omega s - 3sh\omega s \cdot ch^2\omega s + \omega s \cdot ch\omega s) + \frac{Q^2 X}{Y} (3sh^2\omega s \cdot ch\omega s + \omega s \cdot sh\omega s) \right] \end{aligned}$$

en se bornant aux deux premiers termes de F.

Pour déterminer ensuite les constantes P' et Q' qui entrent dans l'expression de φ , on doit faire :

$$\varphi = 0 \quad \text{pour} \quad s = 0$$

et

$$\left(u \frac{d\varphi}{ds} \right)_l = C - u \left[K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l^3 + \dots \right]$$

D'autre part, Q étant remplacé, dans les termes correctifs par sa valeur :

$$Q = \frac{C + \mu\omega \frac{X}{Y} sh\omega l}{\mu\omega ch\omega l}$$

on arrive, après des calculs qui ne présentent aucune difficulté, à la valeur suivante de θ (pour $s = l$) :

$$(3) \quad \theta = \frac{X}{Y} \left(1 - \frac{1}{ch\omega l} \right) + \frac{C}{\mu\omega} th\omega l + K\omega u_1\theta^2 + K'\omega^2 u_1'\theta^3 + \dots$$

en posant :

$$u_1\theta^2 = -\frac{2}{3} \omega \left[\frac{X_0^2}{Y_0^2} \left(\frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} \right) + \frac{C_0}{\mu\omega} \frac{X_0}{Y_0^2} \left(\frac{1}{ch\omega l} + \frac{1}{ch^2\omega l} - \frac{2}{ch^3\omega l} \right) + \frac{C_0^2}{\mu^2\omega^2} \left(\frac{3}{2} \frac{sh}{ch} - \frac{sh^3}{ch^3} \right) \right]$$

et

$$u_1'\theta^3 = \frac{3}{8} \omega^2 \left[\frac{X_0^3}{Y_0^3} \left(\omega l \frac{sh\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{sh^2\omega l}{ch^3\omega l} \right) + \frac{C_0}{\mu\omega} \frac{X_0^2}{Y_0^2} \left(\frac{3\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} - \frac{2\omega l}{ch^2\omega l} \right) + \frac{C_0^2}{\mu^2\omega^2} \frac{X_0}{Y_0} \left(-\frac{sh^2\omega l}{ch^3\omega l} - 3\omega l \frac{sh\omega l}{ch^4\omega l} \right) - \frac{C^3}{\mu^3\omega^3} \left(\frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} + \frac{\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{2}{3} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} \right) \right]$$

Dans cette expression, nous avons omis d'écrire les termes correctifs de la formule (3) (note IV) qu'il faudrait ajouter pour avoir l'expression complète de φ , mais ces termes, nous l'avons vu comme conclusion de la note IV, n'ont qu'une influence très petite et nous nous bornons ici à considérer l'influence des termes en K et K' .

Ayant la valeur de φ , nous calculons a à l'aide de raisonnements tout à fait analogues à ceux qui nous ont servi, dans le même but, note IV. Nous ne développerons pas les calculs. Ils conduisent à l'expression suivante de a :

$$(4) \quad a = \frac{X}{Y} \left(l + \frac{1}{\omega} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} \right) + \frac{C}{\mu\omega^2} \left(1 - \frac{1}{ch\omega l} \right) + Ku_2\theta^2 \\ + K'\omega u'_2\theta^3 + \dots$$

avec :

$$u_2\theta^2 = -\frac{2}{3} \left[\frac{X_0^2}{Y_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{ch^2\omega l} + \frac{1}{ch^3\omega l} \right) \right. \\ \left. + \frac{2C_0}{\mu\omega} \frac{X_0}{Y_0} \left(\frac{sh\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} \right) + \frac{C_0^2}{\mu^2\omega^2} \left(\frac{sh^2\omega l}{ch^3\omega l} - \frac{1}{2} \frac{sh^2\omega l}{ch^2\omega l} - \frac{1}{2} \frac{1}{ch\omega l} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

et :

$$u'_2\theta^3 = \frac{3}{8} \omega \left[\frac{X_0^3}{Y_0^3} \left(\frac{5}{3} \frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} - \frac{2}{3} \frac{sh\omega l}{ch\omega l} - \frac{\omega s}{ch^4\omega l} \right) \right. \\ + \frac{C_0}{\mu\omega} \frac{X_0}{Y_0^2} \left(\frac{3}{ch^3\omega l} + \frac{3\omega l sh\omega l}{ch^4\omega l} - \frac{3}{ch\omega l} \right) \\ + \frac{C_0^2}{\mu^2\omega^2} \frac{X_0}{Y_0} \left(-\frac{sh\omega l}{ch^3\omega l} - \frac{2\omega l}{ch^2\omega l} + \frac{3\omega l}{ch^4\omega l} \right) \\ \left. + \frac{C_0^3}{\mu^3\omega^3} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{ch^3\omega l} - \frac{1}{3} \frac{1}{ch\omega l} - \frac{\omega l sh\omega l}{ch^4\omega l} \right) \right].$$

Si on calcule de même la correction pour b , on trouve que cette coordonnée se présente sous la forme :

$$b = l + Ku_3\theta^3 + K'u'_3\theta^4.$$

Il en résulte que la valeur de la quantité ε que nous avons introduite à un point correspondant des calculs dans la note IV, n'est modifiée par suite de l'introduction des termes en K et K' que par des termes de l'ordre de θ^3 et θ^4 . Comme d'autre part, dans la suite cette quantité n'intervient que dans des termes où elle est multipliée par des facteurs de l'ordre de θ , on voit que ω' , C , X et Y gardent ici, les mêmes valeurs que celles que nous avons trouvées dans la note IV.

Si donc, nous posons, comme nous l'avons fait dans les notes précédentes :

$$A = 1 - \frac{1}{ch\omega l} \quad B = \frac{1}{\omega} th\omega l,$$

il vient :

$$(5) \quad \begin{cases} \theta = \frac{AX_0}{Mg} + \frac{BC_0}{\mu} + \mathfrak{N}_1 \\ a = \frac{(l-B)X_0}{Mg} + \frac{AC_0}{Mg} + \mathfrak{T}_1. \end{cases}$$

$\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{T}_1$ sont des expressions qui renferment les termes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ calculées en (9) dans la note IV et, en plus, les termes correctifs calculés plus haut (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \mathfrak{N} + K\omega u_1 \theta^2 + K'\omega^2 u'_1 \theta^3 \\ \mathfrak{T}_1 &= \mathfrak{T} + K\omega u_2 \theta^2 + K'\omega u'_2 \theta^3. \end{aligned}$$

L'équation du quatrième ordre donnant le mouvement du pendule a maintenant comme correction au deuxième membre, l'expression :

$$(6) \quad P = \frac{\mu}{B} \mathfrak{N}_1 + \frac{\mu}{B} \frac{l-B+Ah}{g} \frac{d^2 \mathfrak{N}_1}{dt^2} - \frac{Ax + MghB}{Bg} \frac{d^2 \mathfrak{T}_1}{dt^2}.$$

2. — L'influence de P sur la durée d'oscillation du pendule se traitera exactement de la même façon que dans la note IV, mais ici il est important de faire une remarque : les écarts à la loi ordinaire de la flexion ne dépendent que de la position de la lame, et non de sa vitesse. Pour cette raison, on devra calculer la variation produite pendant $\frac{1}{4}$ de la période, et la multiplier ensuite par 4, c'est-à-dire appliquer la formule :

$$\Delta T = \frac{4}{U\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2)\theta_0} \int_0^{\frac{T}{4}} P \cos \alpha t \, dt.$$

Par commodité, nous séparerons l'effet dû aux termes en K de celui dû aux termes en K'. La partie P_k de P, due à K, a comme expression, en faisant :

$$\theta'' = -\alpha^2 \theta \text{ et } \theta'^2 = \alpha^2(\theta_0^2 - \theta^2) :$$

$$P_k = \frac{K\mu}{B} \left\{ \left[\omega u_1 - \frac{4\alpha^2}{g} \omega u_1 (l - B + Ah) + \frac{4\alpha^2}{g} u_2 (A\mu + MghB) \right] \theta^3 + \left[\frac{2\alpha^2}{g} \omega u_1 (l - B + Ah) - \frac{6\alpha^2}{g} u_2 (A\mu + MghB) \right] \theta_0^2 \right\}.$$

Et la partie $P_{k'}$ due à K' donne :

$$P_{k'} = \frac{K'\mu\omega}{B} \left\{ \left[\omega u'_1 - \frac{9\alpha^2}{g} \omega u'_1 (l - B + Ah) + \frac{9\alpha^2}{g} u'_2 (A\mu + MghB) \right] \theta^2 + \frac{6\alpha^2}{g} \omega u'_1 (l - B + Ah) - \frac{6\alpha^2}{g} u'_2 (A\mu + MghB) \right\} \theta_0^2.$$

On calcule alors les variations de durée ΔT_k , $\Delta T_{k'}$, correspondant respectivement à chacune de ces deux perturbations et on trouve finalement :

$$(7) \quad \frac{\Delta T_k}{T} = \frac{8}{3} \frac{K}{2\pi l \alpha^2} \left\{ \frac{\mu}{B} \omega \left[1 - \frac{\alpha^2}{g} (l - B + Ah) \right] u_1 + \frac{\alpha^2}{g} \frac{A\mu + MghB}{B} u_2 \right\} \cdot \theta_0$$

$$(8) \quad \frac{\Delta T_{k'}}{T} = \frac{3}{8} \frac{K'}{l \alpha^2} \left\{ \frac{\mu}{B} \left[1 - \frac{\alpha^2}{g} (l - B + Ah) \right] \omega^2 u'_1 + \frac{\alpha^2}{g} \frac{A\mu + MghB}{B} \omega u'_2 \right\} \cdot \theta_0^2.$$

Ces formules permettent de calculer les variations de la durée dues aux écarts à la loi ordinaire de la flexion (en ce qui concerne les deux premiers termes perturbateurs, en K et K'), ou inversement de déduire les constantes K et K' des expériences sur les écarts à la loi d'isochronisme.

On peut mettre les expressions (7) et (8) sous une forme beaucoup plus simple, quand le rayon de gyration ρ du pendule est petit par rapport à la longueur du pendule et que la lame a eu une influence relativement faible.

En effet dans ce cas, on peut écrire (v. note III, formule 12).

$$(9) \quad \frac{X}{Y} = \theta \quad \text{et} \quad \frac{C}{\mu\omega} = \frac{\theta}{sh\omega l}.$$

Si on calcule alors les valeurs de u_1, u'_1, u_2, u'_2 on trouve :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{2}{3} \frac{1}{sh\omega l} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{sh\omega l} \right) \\ u'_1 &= -\frac{3}{8} \frac{1}{sh^2\omega l} \left(ch\omega l + \frac{2}{3} \frac{1}{ch\omega l} + \frac{\omega l}{sh\omega l} \right) \\ u_2 &= -\frac{1}{3} \frac{1}{sh^2\omega l} \left(ch^2\omega l - \frac{1}{ch\omega l} \right) \\ u'_2 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{ch\omega l} \left(sh\omega l + \frac{2}{sh\omega l} \right). \end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans (7) et (8); faisons aussi $\frac{x^2}{g}(l+h)=1$, ce qui correspond à la première des formules (9), nous obtenons aisément comme valeur approchée de ΔT , renfermant les deux influences (en K et K') :

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{\Delta T}{T} &= -\frac{4}{3\pi} \frac{K}{L} \left(\frac{1}{sh^2\omega l} + \frac{1}{3} \right) \theta_0 - \\ &\quad - \frac{3}{64} \frac{K'}{L} \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \left(\frac{2ch^3\omega l + 3ch\omega l}{sh^3\omega l} + \frac{3\omega l}{sh^4\omega l} \right) \theta_0^2. \end{aligned}$$

L est la longueur du pendule simple synchrone.

C'est cette formule qui nous sert pour calculer K et K' et comparer la théorie et l'expérience.

3. — *Cas particuliers.* — a) Supposons la lame courte de telle sorte que ωl soit petit. Il vient :

$$(11) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{3\pi} \frac{Kx}{MgL l^2} \theta_0 - \frac{3}{8} \frac{K'x}{Mg l^3} \theta_0^2.$$

Cette formule peut s'obtenir directement de la façon suivante : comme la lame est très courte, on peut faire $b-y=0$, $a-x=0$ et l'équation initiale déterminant φ s'écrit :

$$\mu \left[\frac{d\varphi}{ds} + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 \right] = C.$$

Dans les termes en K et K' qui sont des corrections, on prend pour $\frac{d\varphi}{ds}$ sa valeur de première approximation qui est

constante et égale à $\frac{\theta}{l}$ comme nous l'avons indiqué dans la note III.

Par suite :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{\mu} - \frac{K\theta^2}{l^2} - \frac{K'\theta^3}{l^3}$$

d'où φ et sa valeur θ pour $s = l$,

$$\theta = \frac{Cl}{\mu} - \left(\frac{K\theta^2}{l} + \frac{K'\theta^3}{l^2} \right)$$

d'où :

$$C = \frac{\mu\theta}{l} + \mu \left(\frac{K\theta^2}{l^2} + \frac{K'\theta^3}{l^3} \right).$$

L'équation du mouvement se simplifie notablement. Elle est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgh\theta + C = 0$$

ou :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgh\theta + \frac{\mu\theta}{l} = -\mu \left(\frac{K\theta^2}{l^2} + \frac{K'\theta^3}{l^3} \right).$$

L'écart à l'isochronisme mesuré par la variation ΔT de la période T de l'oscillation non perturbée est :

$$\Delta T = -\frac{4}{Mgh} \int_0^{\frac{T}{4}} \mu \left(\frac{K\theta^2}{l^2} + \frac{K'\theta^3}{l^3} \right) \cos \alpha t. dt$$

ou :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{3\pi} \frac{K\mu}{Mghl^2} \theta_0 - \frac{3}{8} \frac{K'\mu}{Mghl^3} \theta_0^2$$

ce qui est la formule (11) puisque nous supposons :

$$\rho = 0, \text{ c'est-à-dire } h = L$$

b) lame très longue. — Cet autre cas particulier que l'on peut traiter directement ou déduire des formules générales, conduit au résultat suivant :

$$(12) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\frac{4}{9\pi} \frac{K}{L} \theta_0 - \frac{3}{32} \frac{K'}{L} \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \cdot \theta_0^2$$

Je n'ai pas fait le calcul dans le cas général, de l'influence d'un 3^e terme : $K'' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2$, s'ajoutant à $\frac{d\varphi}{ds}$ dans la formule (1), car pratiquement, il nous suffira de connaître cette influence pour une lame longue. Le calcul direct, dans ce cas, beaucoup plus simple, conduit alors à ajouter au 2^e membre de la formule (12) la quantité :

$$-\frac{16}{75\pi} \frac{K''}{L} \frac{Mg}{\mu} \theta_0^3.$$

NOTE VI

Calcul de la flèche de flexion dans les expériences statiques. Influence d'écart à la loi ordinaire.

1. — Soit une lame de longueur l , encastrée en A, primitivement horizontale, et que l'on fléchit à l'extrémité libre B par une charge P.

Soient a et b les coordonnées de l'extrémité B (axe Ax vertical, Ay horizontal); x, y les coordonnées d'un point M de la lame, φ l'angle de la tangente en M à la lame avec Oy et s l'arc AM.

La loi ordinaire de la flexion permet d'écrire :

$$(1) \quad \mu \frac{d\varphi}{ds} = P(b - y).$$

Dérivons cette équation par rapport à s , remplaçons dy par $ds \cos \varphi$: il vient :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -P \cos \varphi.$$

En première approximation, on ferait $\cos \varphi = 1$ et cela conduirait à la formule élémentaire dans laquelle la flèche a est proportionnelle à la force P.

Supposons une courbure non infiniment petite et faisons $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, il vient :

$$(2) \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\omega^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)$$

en posant :

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{\mu}}.$$

Dans l'équation (2) $\frac{\omega^2 \varphi^2}{2}$ est un terme correctif; nous pouvons y remplacer φ par sa valeur de première approximation obtenue en résolvant l'équation :

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\omega^2.$$

En tenant compte des conditions : $y = 0$ et $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 = \omega^2 l$, pour $s = 0$ on trouve de suite :

$$\varphi = -\omega^2 \left(\frac{s^2}{2} - ls \right).$$

En portant cette valeur de φ dans l'équation (2) en intégrant deux fois et en tenant compte des conditions :

$$\varphi = 0 \text{ pour } s = 0$$

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l = 0 \text{ pour } s = l,$$

on obtient :

$$\varphi = \omega^2 \left(ls - \frac{s^2}{2} \right) - \omega^6 \left[\frac{1}{240} s^6 + \frac{1}{24} l^2 s^4 - \frac{1}{40} ls^5 - \frac{1}{15} ls^3 \right]$$

Calculons la flèche.

On a :

$$dx = ds \sin \varphi = \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) ds.$$

En ne gardant que les termes de l'ordre de φ^3 , après avoir remplacé dans cette formule φ par sa valeur trouvée précédemment et $\frac{\varphi^3}{6}$ par sa valeur approximative, on trouve :

$$x = \omega^2 \left(\frac{ls^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right) + \omega^6 \left(\frac{1}{240} s^7 + \frac{7}{120} l^2 s^5 - \frac{1}{40} ls^6 - \frac{1}{30} l^3 s^3 - \frac{1}{24} l^3 s^4 \right)$$

Faisons dans cette formule $s = l$, nous aurons la valeur a de la flèche :

$$(3) \quad a = \frac{P}{\mu} \frac{l^3}{3} \left(1 - \frac{4}{35} \frac{P^2 l^4}{\mu^2} \right)$$

2. — *Influence des écarts à la loi ordinaire de la flexion.*

— Nous partons de l'équation modifiée de l'équilibre de flexion :

$$(4) \quad \mu \left[\frac{d\varphi}{ds} + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 \right] = P(b - y)$$

Les termes en K et K' sont des corrections. On peut les négliger dans une première approximation, obtenir pour φ la fonction de s trouvée précédemment, puis porter $\frac{d\varphi}{ds}$ ainsi calculé dans l'équation précédente. Il vient :

$$\mu \frac{d\varphi}{ds} = P(b - y) - \mu [K\omega^4(l - s)^2 + K'\omega^6(l - s)^3]$$

En opérant comme dans la première partie, c'est-à-dire en dérivant par rapport à s pour éliminer y (en écrivant $dy = ds \cos \varphi$) et en tenant compte des conditions initiales précédemment indiquées ⁽¹⁾, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi = \omega^2 \left(ls - \frac{s^2}{2} \right) + K\omega^4 \left[ls^2 - \frac{s^3}{3} - l^2s \right] + \\ + K'\omega^6 \left[\frac{2}{3} l^2s^2 + \frac{s^4}{4} - ls^3 - l^3s \right] \end{aligned}$$

(Il faudrait ajouter à cette expression la correction trouvée dans la première partie mais elle est très petite et d'autre part elle ne modifie pas les termes en K et K').

Flèche. — On a :

$$dx = ds \sin \varphi = ds \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)$$

⁽¹⁾ L'une de ces conditions est :

$$\mu \left[\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l + K \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l^2 + K' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l^3 \right] = 0,$$

mais elle se réduit évidemment à $\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_l = 0$ comme dans la première partie, car au point B, le moment est nul, la courbure l'est aussi.

On remplace φ par la valeur précédente, et $\frac{\varphi^3}{6}$ par :

$$\frac{1}{6} \omega^6 \left(l s - \frac{s^2}{2} \right)^3$$

puis on intègre l'expression obtenue, en tenant compte du fait que $x=0$ pour $s=0$, enfin on remplace s par l ; on aboutit alors à :

$$a = \frac{P}{\mu} \frac{l^3}{3} \left(1 - \frac{4}{35} \frac{P^2}{\mu^2} l^2 \right) - \frac{1}{4} K \frac{P^2}{\mu^2} l^3 - \frac{1}{5} K' \frac{P^3}{\mu^3} l^3$$

Un troisième terme $K'' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^6$ ajouté à $\frac{d\varphi}{ds}$ dans la formule (4), donnerait comme correction supplémentaire :

$$- \frac{1}{6} K'' \frac{P^6}{\mu^4} l^6.$$

Cette formule sert à calculer les coefficients K K' K'' ... à l'aide d'expériences statiques de flexion.

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE

I. — M. G. Lippmann a imaginé en 1897 une méthode photographique, utilisant l'étincelle électrique, pour la comparaison des pendules (écart de phase et durées d'oscillation).

J'ai réalisé cette méthode et montré qu'elle peut donner les résultats suivants :

a) La comparaison des phases simultanées de deux pendules battant la seconde se fait à $\frac{1}{10.000}$ de seconde près.

b) La détermination du rapport des durées d'oscillation de deux pendules à secondes se fait à l'approximation de $\frac{1}{10^6}$, l'expérience n'ayant qu'une durée de 3 minutes.

II. — D'une comparaison théorique et expérimentale de la méthode, avec celle des coïncidences, je conclus nettement à la supériorité de l'observation photographique.

III. — J'ai appliqué la méthode photographique sous une forme simplifiée, ne nécessitant pas l'étincelle, à l'Observatoire de Paris, pour une comparaison précise de deux horloges et j'ai pu mettre en évidence des causes d'erreur dans la méthode actuelle des coïncidences téléphoniques. Comme conséquence de ces expériences, je préconise l'adoption de la méthode photographique pour la comparaison des horloges dans les Observatoires.

IV. — Les qualités particulières de la méthode photographique m'ont permis une étude précise de l'influence de la suspension sur l'oscillation d'un pendule libre.

J'ai d'abord étudié la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude d'un pendule à couteau. Ayant observé des anomalies, j'ai été amené pour les expliquer à faire une étude complète et entièrement nouvelle du pendule suspendu à un cylindre métallique.

J'ai défini avec précision le caractère de l'oscillation et les

variations à la loi d'isochronisme présentés par ce pendule, et non expliquées par les théories ordinaires. J'indique les hypothèses qui peuvent interpréter les faits.

Il résulte de ces expériences, la nécessité d'une étude des variations d'isochronisme du pendule à couteau si l'on veut effectuer la réduction exacte à l'amplitude infiniment petite ; la correction due à l'effet du support, doit porter sur la durée déduite des observations aux petits arcs d'oscillation, contrairement à ce qu'on avait fait jusqu'ici.

D'autre part, je présente cette étude comme une méthode précise et commode pour déterminer la dureté, ou pour mettre en évidence les propriétés d'écrouissage des métaux.

V. — J'ai ensuite fait une étude expérimentale complète des variations à la loi d'isochronisme produites par la suspension à lame élastique.

Je montre que la théorie du mouvement du pendule faite dans le cas le plus général et en admettant la loi ordinaire de la flexion, est en désaccord avec les faits et que, pour interpréter ces derniers, il faut considérer le module d'élasticité de la lame comme variable avec la déformation.

Cette hypothèse est en accord exact avec des expériences d'équilibre de flexion, entreprises comme vérification :

Comme conséquence pratique de cette étude, j'indique les conditions auxquelles doit satisfaire une bonne suspension à ressort, et je préconise l'emploi d'une lame unique et relativement longue.

VI. — J'expose enfin très sommairement, des projets dans lesquels la méthode photographique trouverait une application directe :

- a) Emploi du pendule libre comme étalon de temps ;
 - b) Emploi de deux pendules libres comme système garde-temps très précis ;
 - c) Détermination directe des longitudes.
-

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les lois de Berthollet

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 12 avril 1922.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. MOLLIARD.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

P. APPELL.

